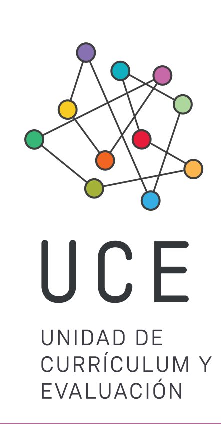
Cuadernillo de repaso

MATEMÁTICA
EJE ÁLGEBRA

IVº medio





Cuadernillo de repaso contenidos Matemática 2020

Material adaptado por la Unidad de Currículum y Evaluación del Ministerio de Educación en base a Cid Figueroa, Eduardo. (2019). *21 temas para aprender y practicar matemática.* Editorial Cid.

Puedes encontrar los Cuadernillos de repaso de Matemática ingresando a www.curriculumnacional.cl o escaneando el siguiente código QR:



INTRODUCCIÓN

En el contexto actual, el Ministerio de Educación ha asumido desde su inicio como tarea primordial el apoyar a todos los estudiantes, docentes, equipos directivos, sostenedores y apoderados del país de modo que puedan, durante la suspensión de clases y en el retorno a clases, apoyar el desarrollo de los aprendizajes esenciales que nos permitan reducir las brechas educacionales provocadas por la pandemia.

El aprendizaje y el desarrollo del pensamiento matemático es de vital importancia para los estudios de nuestros estudiantes, pues ayuda a comprender la realidad y proporciona herramientas necesarias para desenvolverse en la vida cotidiana. Esta se trabaja sistemáticamente enseñando habilidades y contenidos desde los primeros niveles de educación hasta afianzarse en los niveles superiores.

Dada su relevancia, la Unidad de Currículum y Evaluación pone a disposición para los estudiantes de 4° año de Enseñanza Media cuatro cuadernillos, uno por cada eje de las Bases Curriculares de Matemática, que les permitirán repasar y ejercitar de manera autónoma las habilidades y conocimientos adquiridos en Matemática desde séptimo a tercero medio fundamentalmente. En este cuadernillo de repaso encontraras los contenidos del Eje Álgebra.

En la primera parte del cuadernillo se presenta el repaso de la parte teórica, luego modelos de ejercicios resueltos con sus soluciones, algunos ejercicios para practicar y un miniensayo.

¿Cómo usar este Manual?

1. Lee la parte teórica y los ejercicios resueltos, no resuelvas las guías de ejercicios, sin antes haber hecho esto.

2. Resuelve la guía de ejercicios del capítulo, aquellos ejercicios que no puedas resolver, déjalos para un segundo intento, no consultes a tu compañero(a) o profesor(a) inmediatamente, o invalidarás algo muy importante en tu proceso de aprendizaje. El esfuerzo que realizas para poder resolver un ejercicio permite que los contenidos, teoremas, propiedades etc., que pasan por tu mente queden más «frescos» y fortalecidos en ella.
   La gran mayoría de los ejercicios que no resuelven los estudiantes no es debido a que no sepan los contenidos o cómo resolver los problemas, sino a que no los recuerdan, por lo tanto, un buen método de preparación es el anterior para ir recordando lo olvidado.

3. Si al resolver un ejercicio notas que te equivocaste, detente a revisar paso a paso donde está tu error, este proceso es muy importante ya que te permite detectar posibles errores de concepto que debes corregir al momento.

4. No es conveniente que resuelvas los miniensayos sino hasta haber completado cada capítulo, no sacarás mucho provecho si no tienes todavía en tu mente una buena provisión de contenidos.

5. En general se ha procurado que los ejercicios estén «graduados», por lo tanto, no deberías tener problemas en los primeros ejercicios de cada guía. Si los tuvieras solicita apoyo de tu profesor ya que requerirás más ayuda que la que te pueda brindar este texto.

ÍNDICE

EJE

ÁLGEBRA

Capítulo 1

OPERATORIA ALGEBRAICA



Al-Juarismi, matemático de origen persa que vivió en el siglo IX, desarrolló el Álgebra, rama de la Matemática que generaliza la Aritmética, cuyo estudio son los números y sus operaciones.

CONCEPTOS CLAVES

- Factor o divisor
- Producto notable
- Factorización
- Ecuación de primer grado
- Sistemas de ecuaciones

PRODUCTOS NOTABLES

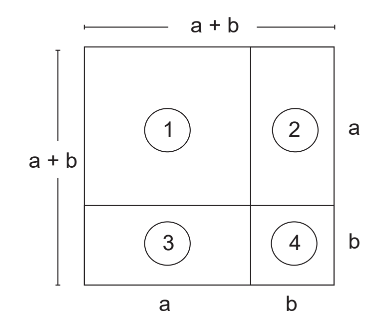
Los productos notables más importantes son los siguientes:

• Suma por su diferencia	$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$
• Cuadrado de binomio	$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$; $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
• Producto de binomios con término común	$(ax + b)(ax + c) = (ax)^2 + (b + c)ax + bc$
• Cuadrado de trinomio	$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$
• Cubo de binomio	$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$; $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

Visualización geométrica de algunos productos notables:

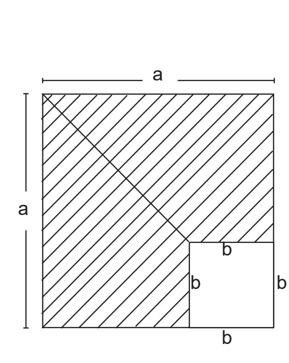
- **Cuadrado de binomio:** $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

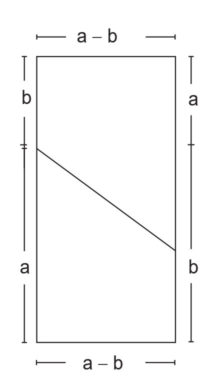
  El cuadrado de lado a + b se ha dividido en cuatro sectores cuyas áreas son las siguientes:
  Área 1: a^2, Área 2: ab , Área 3: ab, Área 4: b^2.
  Por lo tanto: $(a + b)^2 = a^2 + ab + ab + b^2$, de donde se concluye que $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.



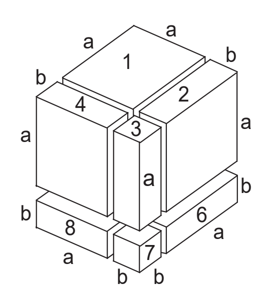
- **Suma por su diferencia:** $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

  En la figura de la izquierda se tienen dos cuadrados de lados a y b respectivamente.
  Si esta figura se recorta, se puede formar el rectángulo de la derecha, cuyos lados son (a + b) y (a – b).
  Por lo tanto el área sombreada de la izquierda: $a^2 - b^2$ es igual al área del rectángulo de la derecha $(a + b)(a - b)$, por lo tanto $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$.





- **Cubo de binomio:** $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
  El cubo de arista (a + b) de la figura, se ha dividido en 8 cuerpos, los volúmenes de cada uno de ellos son los siguientes:
  $V_1 = a^3$, $V_2 = a^2b$, $V_3 = ab^2$, $V_4 = a^2b$, $V_5 = a^2b$, $V_6 = ab^2$, $V_7 = b^3$ y $V_8 = ab^2$.
  La suma de los 8 volúmenes sería igual al volumen del cubo inicial que es $(a + b)^3$, con lo que se concluye que $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$



FACTORIZACIÓN

La factorización consiste en expresar sumas y restas en productos.
Las factorizaciones que más se utilizan son las siguientes:

• Diferencia de cuadrados	$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$
• Factorización de trinomio cuadrático	$x^2 + bx + c = (x + p)(x + q)$, con $p + q = b$ y $pq = c$
• Suma de cubos	$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$
• Diferencia de cubos	$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

ECUACIÓN DE PRIMER GRADO

Supongamos que tenemos la ecuación de primer grado $ax - b = 0$, al despejar x, obtenemos que $x = \frac{b}{a}$, entonces tenemos tres casos:

- Si $a \neq 0$ y $b = 0$, entonces $x = 0$.
- Si $a \neq 0$, entonces x tiene una única solución.
- Si $a = b = 0$, entonces x tiene infinitas soluciones.



SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES CON DOS INCÓGNITAS

Un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas es de la forma:

$$\begin{array}{l} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{array}$$

donde a, b, c, a', b' y c' son números reales y x e y son las soluciones.

Al encontrar las soluciones para "x" y para "y" lo que estamos encontrando es el punto donde se intersectan las rectas cuyas ecuaciones son las que aparecen en el sistema.
En el siguiente capítulo veremos los métodos de reducción, igualación y sustitución que permiten resolver este tipo de sistemas.
Acá estudiaremos la relación que existe entre los coeficientes y las soluciones del sistema.
Existen tres casos:

(1) Sistema compatible indeterminado
En este caso las ecuaciones representan dos rectas paralelas coincidentes, por lo que se obtendrán infinitas soluciones. Esto ocurre cuando son proporcionales los coeficientes de las rectas:

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} \leftrightarrow \infty \text{ soluciones} \leftrightarrow \text{sistema compatible indeterminando}$$

(2) Sistema compatible determinado

En este caso las ecuaciones representan dos rectas secantes, por lo que se obtendrá una única solución. Esto ocurre cuando no son proporcionales los coeficientes de "x" y de "y" de las rectas:

$$\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'} \leftrightarrow \text{solución única} \leftrightarrow \text{sistema compatible determinado}$$

(3) Sistema incompatible

En este caso las ecuaciones representan dos rectas paralelas no coincidentes, por lo que no existirá solución. Esto ocurre cuando son proporcionales los coeficientes de "x" y de "y " de las rectas, pero no con los términos libres.

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'} \leftrightarrow \text{no existe solución} \leftrightarrow \text{sistema incompatible}$$

Ejemplo:

Determina el valor de **p**, para que el sistema $\begin{array}{l} (p+1)x - 2py = 8 \\ 3x - 5y = 4 \end{array}$ tenga infinitas soluciones.

Solución:

Estamos acá ante el caso (1), un sistema compatible indeterminado, entonces debe ocurrir que

$\frac{p+1}{3} = \frac{-2p}{-5} = \frac{8}{4}$, de la primera proporción: $\frac{p+1}{3} = \frac{-2p}{-5}$, si multiplicamos cruzado y resolvemos, obtenemos que p=5, de la segunda proporción $\frac{-2p}{-5} = \frac{8}{4}$, multiplicando cruzado y resolviendo, también obtenemos que p=5, luego para este valor el sistema tendrá infinitas soluciones.

Ejemplo:

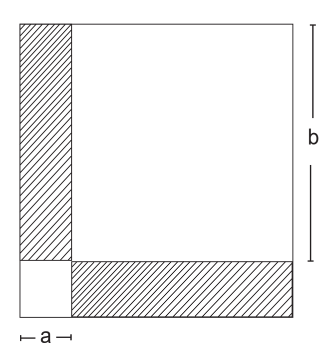
Determina que condición debe cumplir **k**, para que el sistema $\begin{array}{l} (k+1)x - 3y = 12 \\ kx - 4y = 5 \end{array}$ tenga una única solución.

Solución:

Si el sistema tiene una única solución, corresponde a un sistema compatible determinado (caso 2), por lo tanto se debe cumplir que $\frac{k+1}{k} \neq \frac{-3}{-4}$, multiplicando cruzado y resolviendo, obtenemos que $k \neq -4$.

EJERCICIOS RESUELTOS

1. La figura está formada por dos cuadrados de lados a y b y dos rectángulos sombreados. ¿Cuál(es) de las siguientes expresiones corresponde(n) al área sombreada?



I) $(a + b)^2 – (a^2 + b^2)$

II) $2(a + b)b – 2b^2$

III) $\dfrac{(a + b)^2 – (a – b)^2}{2}$



A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo II y III
E) I, II y III

Tenemos que en los rectángulos sombreados sus lados miden “a” y “b”, por lo tanto el área de cada rectángulo es ab y el área de la figura sombreada sería 2ab.

I) El área sombreada corresponde al área del cuadrado mayor (cuyo lado mide a + b) restada con las áreas de los cuadrados blancos que son a^2 y b^2, es decir $(a + b)^2 - (a^2 + b^2)$, por lo tanto I es correcta.

II) Si desarrollamos la expresión $2(a + b)b - 2b^2$, obtenemos $2ab + 2b^2 - 2b^2 = 2ab$, por lo tanto es correcta.

III) Si desarrollamos la expresión $\dfrac{(a + b)^2 – (a – b)^2}{2}$, se tiene

$\dfrac{(a + b)^2 – (a – b)^2}{2} = \dfrac{a^2 + 2ab + b^2 – (a^2 – 2ab + b^2)}{2} = \dfrac{4ab}{2} = 2ab$, por lo tanto también es correcta. Respuesta E) I, II y III

2. Las aristas de dos cubos miden respectivamente (a+b) y (a-b) unidades.
¿Cuál es la diferencia, en ese orden, en unidades cúbicas, entre sus volúmenes?

Solución:

El volumen de cubo de arista a es a^3, por lo tanto el volumen del primer cubo es $(a + b)^3$, según el producto notable de un cubo de binomio, tenemos que $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, mientras que el volumen del segundo cubo es $(a – b)^3 = a^3 – 3a^2b + 3ab^2 – b^3$, restando ambos volúmenes, tenemos:

$(a + b)^3 – (a – b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 – (a^3 – 3a^2b + 3ab^2 – b^3) = 6a^2b + 2b^3 = 2b(3a^2 + b^2)$.

3. ¿Cuál(es) de las siguientes expresiones es (son) factor(es) de la expresión $(a - b)^3 + 2b(a - b)^2$?

I) ab
II) $a + b$
III) $a^2 - b^2$

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y III
D) Solo II y III
E) I, II y III

Solución:
La expresión dada $(a - b)^3 + 2b(a - b)^2$, se puede factorizar por el factor común $(a - b)^2$, entonces nos queda: $(a - b)^2(a - b + 2b) = (a - b)^2(a + b)$, observa que esta última expresión tiene como factores o divisores a las siguientes expresiones: $(a - b)$, $(a + b)$ o $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$, sin embargo ab no es uno de los factores.
Por lo tanto II y III son correctas, respuesta D.

4. Si $a + b = 8$ y $ab = 2$, entonces $a^2 + b^2 =$

Solución:
Si elevamos al cuadrado la expresión $a + b = 8$, obtenemos $(a + b)^2 = 64$, desarrollando el cuadrado de binomio: $a^2 + 2ab + b^2 = 64$, si reemplazamos $ab = 2$, se tiene que $a^2 + b^2 + 4 = 64$, por lo tanto $a^2 + b^2 = 60$.

EJERCICIOS DE PRÁCTICA

1. $(x - y)^2 - (2x + y)^2 =$

A) $-3x^2 + 2xy + 2y^2$
B) $-3x(3x + 2y)$
C) $-3x^2 + 2y^2$
D) $-3x^2$
E) $-3x(x + 2y)$

2. ¿Cuánto vale $a^2 - ab + b^2$, si $a = -2$ y $b = -1$?

A) −5
B) 1
C) 3
D) 5
E) 7

3. $x - 2 - (x - (x + 2)) =$

A) x
B) $-x$
C) $-x - 4$
D) $-x + 4$
E) $x - 4$

4. La factorización de la expresión $x^2 - y^2 - 3x - 3y$ es:

A) $(x - y)(x + y - 3)$
B) $(x + y)(x - y + 3)$
C) $(x + y)(x - y - 3)$
D) $(x - y)(x - y + 3)$
E) $(x - y)((x + y + 3)$

5. ¿Cuál(es) de las siguientes expresiones es (son) factores de $x^3 + x^2y - xy^2 - y^3$?

I) $(x + y)^2$
II) $x^2 + y^2$
III) $x^2 - y^2$

A) Solo I
B) Solo III
C) Solo I y II
D) Solo I y III
E) I, II y III

6. Si $x = 2$ e $y = -1$, entonces el valor numérico de $2x - (x - y - (x - y - (x + y)))$ es:

A) -1
B) 1
C) 3
D) 4
E) 5

7. Si $4p^2 - 4q^2 = 72$ y $\frac{p - q}{3} = 1$, entonces $p + q =$

A) 6
B) 9
C) 12
D) 15
E) 24

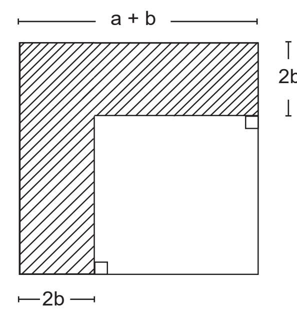
8. Si $x - y = 4$, entonces $3 - 2x + 2y =$

A) -5
B) -4
C) 4
D) 5
E) 11

9. Si en la figura se tiene un cuadrado de lado $a + b$, entonces ¿cuál(es) de las siguientes expresiones corresponde(n) al área sombreada?



I) $4ab$
II) $(a + b)^2 - (a - b)^2$
III) $2b(a + b) + 2b(a - b)$



A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo II y III
E) I, II y III

10. $(2x - z)^2 - (x + z)^2 - (x - z)(x + z) =$

A) $2x^2 - 6xz + 3z^2$
B) $2x^2 + z^2$
C) $2x^2 - z^2$
D) $2x^2 - 6xz - z^2$
E) $2x^2 - 6xz + z^2$

11. Si $a = -4$, $a = 2c$ y $a^2 - 2ac + 3bc = 12$, entonces $b =$

A) -10
B) -2
C) 2
D) 10
E) $\frac{10}{3}$

12. Si $a - b = 5$, entonces $a^2+3a+b^2-2ab-3b =$

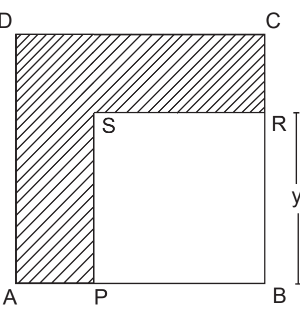
A) 10
B) 28
C) 30
D) 40
E) Falta información para determinarlo.

13. Sea la ecuación en x, $ax-a^2=bx-b^2$, con $a \neq b$, entonces la solución de la ecuación es $x =$

A) $a - b$
B) $a + b$
C) $\frac{b}{a}$
D) $b - a$
E) $a^2 + b^2$

14. En la figura, ABCD y PBRS son cuadrados, ¿cuál(es) de las siguientes expresiones representa(n) el área de la figura sombreada?

I) $x^2 - y^2$
II) $(x - y)y + (x - y)x$
III) $(x - y)^2 + 2(x - y)y$



A) Solo I
B) Solo I y II
C) Solo III
D) Solo II y III
E) I, II y III

15. Si (2,3) es solución del sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{l} ax + (b-1)y = 2 \\ 4x - (b+2)y = 5 \end{array}\right|$$

, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?

A) $a = 4$
B) $a + b = 3$
C) $a - b = 2$
D) $a - 3b = 7$
E) $2a - b = 9$

16. Una bandeja contiene **A** huevos y en cada caja vienen **B** bandejas. Si el valor de **C** cajas es $**D**, ¿cuánto vale cada huevo?

A) $\$\,\frac{CD}{AB}$
B) $\$\,\frac{D}{ABC}$
C) $\$\,\frac{AD}{BC}$
D) $\$\,\frac{ABD}{C}$
E) $\$\,\frac{C}{ABD}$

17. Para un matrimonio están invitadas $(3p - 2q)$ personas y no asisten $(q - p)$, ¿cuántas asistieron?

A) $2p + q$
B) $2p - 2q$
C) $4p - 2q$
D) $2p - 3q$
E) $4p - 3q$

18. Sea el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{l} (p+2)x - (p+5)\,y = 15 \\ px - (p+2)\,y = 10 \end{array}\right|$$

, ¿cuánto debe ser el valor de **p** para que el sistema tenga infinitas soluciones?

A) 3
B) 4
C) 5
D) -4
E) No existe tal valor.

19. Un vehículo tiene un rendimiento de **A** km/L. Si el litro de bencina vale $**B**, ¿cuánto se gastará en bencina si se debe recorrer un trayecto de **C** km?

A) $\$\,\frac{BC}{A}$
B) $\$\,\frac{AB}{C}$
C) $\$\,\frac{AC}{B}$
D) $\$\,\frac{A}{BC}$
E) $\$\,\frac{C}{AB}$

20. La solución de la ecuación:

$(x - a)^2 - (x - b)^2 = (b + a)(b - a)$ es x =

A) $a - b$
B) $a + b$
C) $-a + b$
D) $-a - b$
E) $a^2 - b^2$

21. Sea el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{l}(k+3)x - 2y = 3 \\ (k+1)x + 10y = -15\end{array}\right|$$, ¿qué condición debe cumplir **k** para que el sistema tenga una única solución?

A) $k \neq \frac{8}{3}$

B) $k \neq -\frac{8}{3}$

C) $k \neq -\frac{7}{2}$

D) $k = -\frac{7}{2}$

E) No existe tal valor de k.

22. Si $mx + n^2 = m^2 - nx$ con $m \neq n$, ¿cuál de las siguientes expresiones representa a x?

A) $m^2 + n^2$

B) $(m + n)^2$

C) $(m - n)^2$

D) $m - n$

E) $m + n$

23. Sea la ecuación en x, $ax=p+bx$, ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) **siempre** verdadera(s)?

I) Si $a=b$, no tiene solución.

II) Si $a \neq b$, existe una única solución.

III) Si $p=0$ y $a=b$, tiene infinitas soluciones.

A) Solo I

B) Solo II

C) Solo I y II

D) Solo II y III

E) I, II y II

24. Si el área de un rectángulo es $2x^2 + x - 6$, ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

I) Si un lado mide $x + 2$ el otro mide $2x - 3$.

II) Si un lado mide $2x - 3$ su perímetro es $6x - 2$.

III) Es imposible que un lado mida $x + 1$.

A) Solo I

B) Solo II

C) Solo I y II

D) Solo I y III

E) I, II y III

25. Sea el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{l}(2r+1)x - 4ry = 12 \\ (r+1)x - (2r-1)y = 3\end{array}\right|$$, ¿para qué valor de **r** el sistema **NO** tiene soluciones?

A) $\frac{1}{4}$

B) $-\frac{1}{4}$

C) Distinto a $-\frac{1}{4}$.

D) Distinto a $\frac{1}{4}$.

E) No existe tal valor.

26. Sea la ecuación en x, $ax+ab^2=bx+a^2b$, se puede determinar el valor numérico de x, sabiendo que:

(1) $a \neq b$
(2) $ab = 12$

A) (1) por sí sola
B) (2) por sí sola
C) Ambas juntas, (1) y (2)
D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)
E) Se requiere información adicional

27. El área de un cuadrado es $(a^2 + 6a + 9)$ unidades cuadradas, si el lado aumenta en 2 unidades, entonces una expresión que representa la variación del área del nuevo cuadrado con respecto al área del cuadrado original en unidades cuadradas, es:

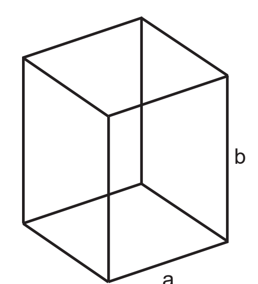
A) $4a + 16$
B) $a + 5$
C) $10a + 25$
D) $a^2 + 10a + 25$
E) 16

28. En un terreno rectangular de largo $(2x + 3)$ metros y ancho $(x + 5)$ metros, se construye una piscina rectangular.
Si la piscina tiene alrededor de ella una franja constante de 2 metros de ancho, ¿cuál es el área de esta franja, en metros cuadrados?

A) $2x + 6$
B) $12x + 16$
C) $12x + 14$
D) $6x + 12$
E) $6x + 18$

29. En el prisma de base cuadrada de la figura, la arista basal mide **a** unidades y la arista lateral mide **b** unidades.
¿Cuál(es) de las siguientes expresiones corresponde(n) a su área en unidades cuadradas?

I) $2a(a + 2b)$
II) $a^2 - 4b^2 + (a + 2b)^2$
III) $2((a + b)^2 - b^2)$



A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo II y III
E) I, II y III

30. El largo y el ancho de un rectángulo miden $(2x + 3)$ y $(x - 2)$ metros respectivamente. Si el largo disminuye en 2 metros y el ancho en 1 metro, entonces la variación del área del nuevo rectángulo respecto del primero, en metros cuadrados es:

A) $4x + 3$
B) $3 - 4x$
C) 2
D) 3
E) 5

31. Si $m^3 - n^3 = 32$ y $m - n = 2$, entonces $mn =$

A) -12
B) 12
C) 4
D) $\frac{14}{3}$
E) Falta información para determinarlo.

32. Si a y b son positivos tales que a > b,

$a^2 + b^2 = 39$ y $ab = 18$, entonces $a^2 - b^2 =$

A) 3
B) 12
C) 15
D) 48
E) $\sqrt{3}$

33. Sea la ecuación en x, $ax - b = bx$, esta ecuación tiene una única solución si:

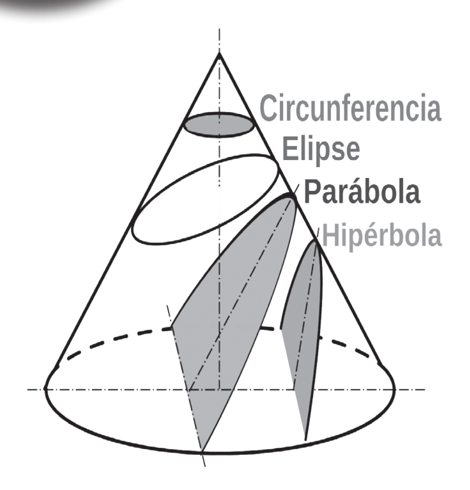
(1) $b \neq 0$
(2) $a \neq b$

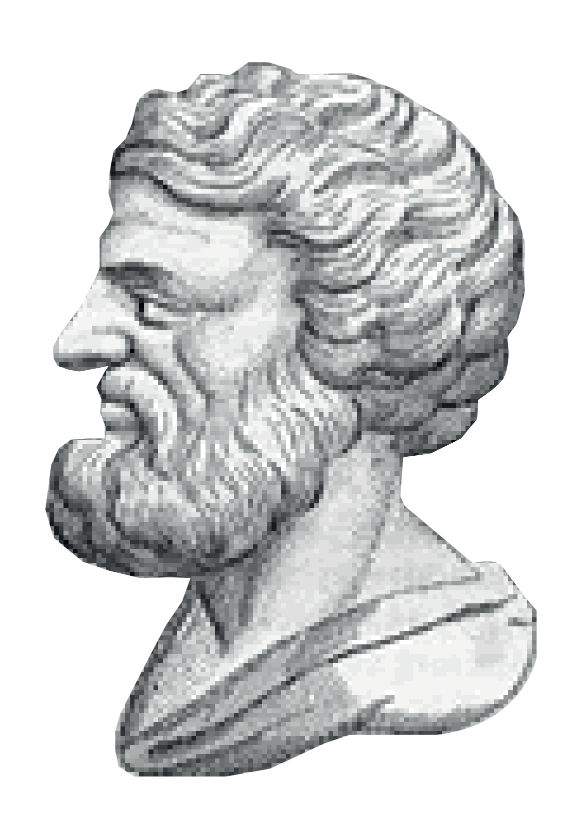
A) (1) por sí sola
B) (2) por sí sola
C) Ambas juntas, (1) y (2)
D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)
E) Se requiere información adicional

RESPUESTAS CAPÍTULO 4									
1. E	**2.** C	**3.** A	**4.** C	**5.** D	**6.** C	**7.** A	**8.** A	**9.** E	**10.** E
11. B	**12.** D	**13.** B	**14.** E	**15.** C	**16.** B	**17.** E	**18.** B	**19.** A	**20.** B
21. B	**22.** D	**23.** D	**24.** C	**25.** B	**26.** C	**27.** A	**28.** B	**29.** E	**30.** B
31. C	**32.** C	**33.** C							

Capítulo 2

ECUACIÓN Y FUNCIÓN CUADRÁTICA





Apolonio de Perga, (262 a.C? - 190 a.C?), en su gran obra, conocida como "Las Cónicas", realizó un amplio estudio acerca de las curvas que se originan al cortar un cono por un plano, estas curvas se denominan secciones cónicas, que pueden ser un círculo, una elipse, una parábola y una hipérbola.
En este capítulo estudiaremos particularmente las parábolas, que son las curvas que resultan al graficar funciones cuadráticas.

CONCEPTOS CLAVES

- Ecuación cuadrática
- Fórmula general
- Discriminante
- Función cuadrática
- Relación entre los coeficientes de la ecuación y la gráfica.
- Forma canónica de una función cuadrática.

RESOLUCIÓN DE ECUACIÓN CUADRÁTICA

Una ecuación cuadrática es de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, donde a, b y c son números reales y $a \neq 0$. Para resolver una ecuación de este tipo, existen diversos métodos, entre los más importantes, tenemos:

- Factorización
- Completación de cuadrados
- Uso de fórmula general

Ejemplo 1

Resolver la ecuación $x^2 - 10x + 24 = 0$

Esta ecuación se puede resolver fácilmente, si factorizamos el trinomio $x^2 - 10x + 24$, para ello determinamos dos números que sumen -10 y multipliquen 24, estos son -4 y -6, luego la factorización del trinomio es $(x - 4)(x - 6)$, entonces la ecuación queda $(x - 4)(x - 6) = 0$.

Como el producto es cero uno de los factores debe ser cero, por lo tanto $x - 4 = 0$ o $x - 6 = 0$, de donde se concluye que las soluciones son 4 o 6.

Ejemplo 2

Resolver la ecuación $x^2 - 8x - 20 = 0$

Esta ecuación la resolveremos mediante una completación de cuadrados.

Esta técnica consiste en formar un cuadrado de binomio, para ello procederemos de la siguiente forma:

$$x^2 - 8x - 20 = 0$$

Tomamos la mitad del coef. de x, y lo elevamos al cuadrado, en este caso $-8 : 2 = -4$, $(-4)^2 = 16$ por lo tanto formamos un 16 al lado izquierdo, para ello debemos sumar 36 a ambos lados de la ecuación:

$$x^2 - 8x - 20 = 0 \qquad /+36$$
$$x^2 - 8x + 16 = 36$$

El lado izquierdo corresponde al desarrollo del cuadrado de binomio $(x - 4)^2$, por lo que la ecuación queda:

$$(x - 4)^2 = 36$$

Extrayendo raíz cuadrada a ambos lados:

$$x - 4 = \pm\sqrt{36}$$

Por lo tanto, $x - 4 = 6$ o $x - 4 = -6$, luego las soluciones son $x = 10$ o $x = -2$.

(*) La formación del cuadrado de binomio explicado de esta forma resulta cuando el coeficiente de x^2 es uno, de no ser así debes dividir previamente la ecuación por este coeficiente.

Ejemplo 3
Resolver la ecuación $2x^2 + 5x - 12 = 0$
Esta ecuación la resolveremos utilizando la fórmula general.
Dada la ecuación de segundo grado: $ax^2 + bx + c = 0$, donde a, b y c son números reales y $a \neq 0$, podemos hallar sus soluciones, utilizando la fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

En este ejemplo, a = 2, b = 5 y c = –12, entonces las soluciones son:

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-12)}}{2 \cdot 2} = \frac{-5 \pm \sqrt{121}}{4} = \frac{-5 \pm 11}{4}, \text{ es decir } x_1 = \frac{-5 + 11}{4} = \frac{3}{2} \text{ y } x_2 = \frac{-5 - 11}{4} = -4$$

DETERMINACIÓN DE UNA ECUACIÓN CUADRÁTICA DADAS SUS SOLUCIONES

Supongamos que las soluciones de una ecuación cuadrática son x_1 y x_2, por lo visto en la técnica de factorización, la ecuación debe ser de la forma $(x - x_1)(x - x_2) = 0$, desarrollando, obtenemos la ecuación:

$$x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 \cdot x_2 = 0$$

Esta corresponde entonces a la ecuación cuadrática cuyas soluciones son x_1 y x_2.

NATURALEZA DE LAS SOLUCIONES

Sabemos que las soluciones de la ecuación cuadrática de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, con $a \neq 0$,

las podemos hallar con la fórmula $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, la cantidad subradical se denomina **discriminante** y se designa con la letra Δ.

Dependiendo del signo del discriminante, tenemos los siguientes casos:

Signo de Δ	Tipo de soluciones
Positivo	Reales y distintas
Cero	Reales e iguales
Negativo	No reales

(*) En el caso en que las soluciones no son reales, estas serán de la forma p + qi y p – qi con p y q numeros reales y $q \neq 0$, es decir serán complejas conjugadas.

GRÁFICO DE UNA FUNCIÓN CUADRÁTICA

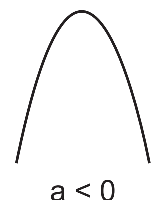
Una función cuadrática es de la forma: $f(x) = ax^2 + bx + c$ (con a,b y c $\in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$) y su gráfica es una parábola.

- **Concavidad**

Las ramas de la parábola se abren hacia arriba o hacia abajo, dependiendo si el signo de a es positivo o negativo:



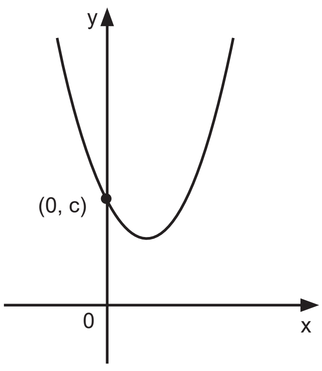
$a > 0$
las ramas se abren hacia arriba



$a < 0$
las ramas se abren hacia abajo

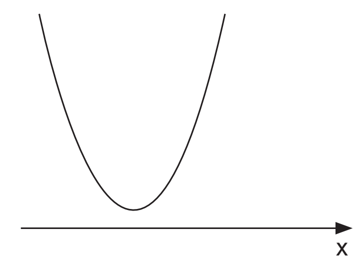
- **Intersección con eje y**

La intersección de la gráfica con el eje y es el punto (0,c):

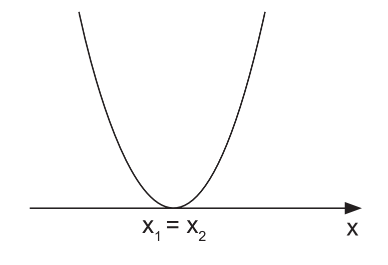


- **Intersección con eje x**

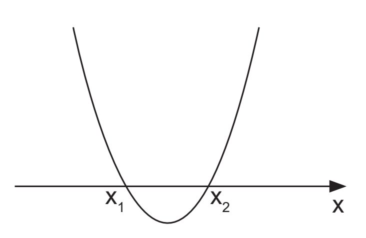
Las intersecciones de la gráfica de la función cuadrática, llamados ceros de la función, corresponden a las soluciones de la ecuación cuadrática asociada a la función, estos pueden ser dos, uno o ninguno, dependiendo del signo del discriminante, como lo habíamos visto anteriormente.



$b^2 - 4ac < 0$
La parábola no intersecta al eje x

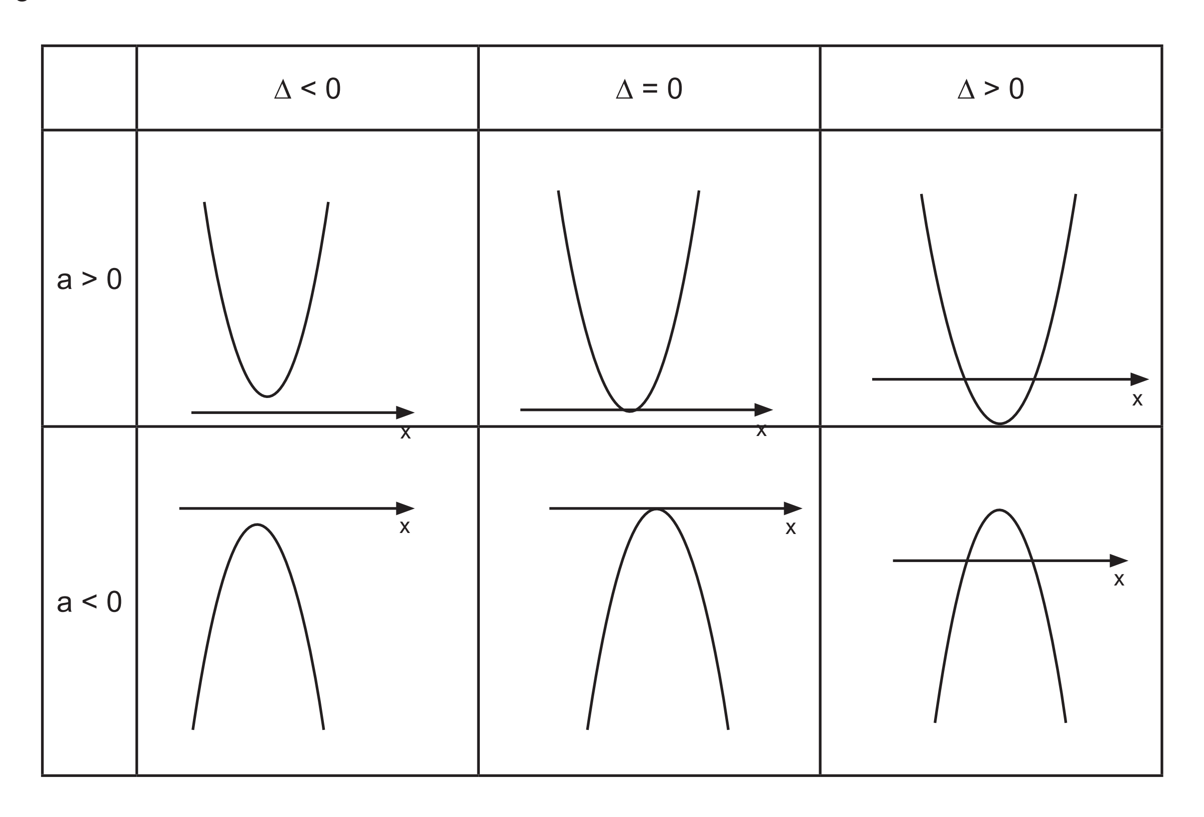


$b^2 - 4ac = 0$
La parábola es tangente al eje x



$b^2 - 4ac > 0$
La parábola intersecta al eje x en dos puntos

Considerando el signo del coeficiente cuadrático y del discriminante, tenemos entonces los siguientes casos:

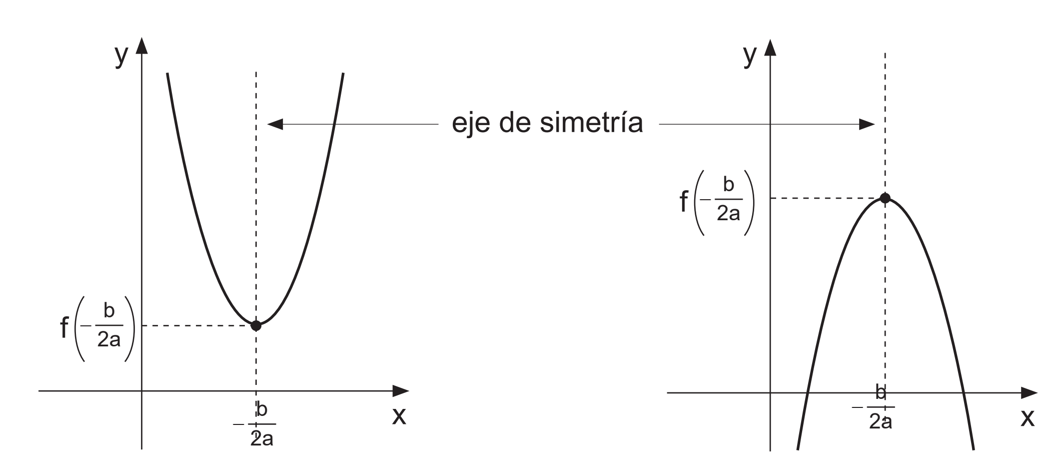


- **Vértice y eje de simetría**

El vértice es el punto más bajo en la gráfica cuando a > 0 y es el punto más alto cuando a < 0.

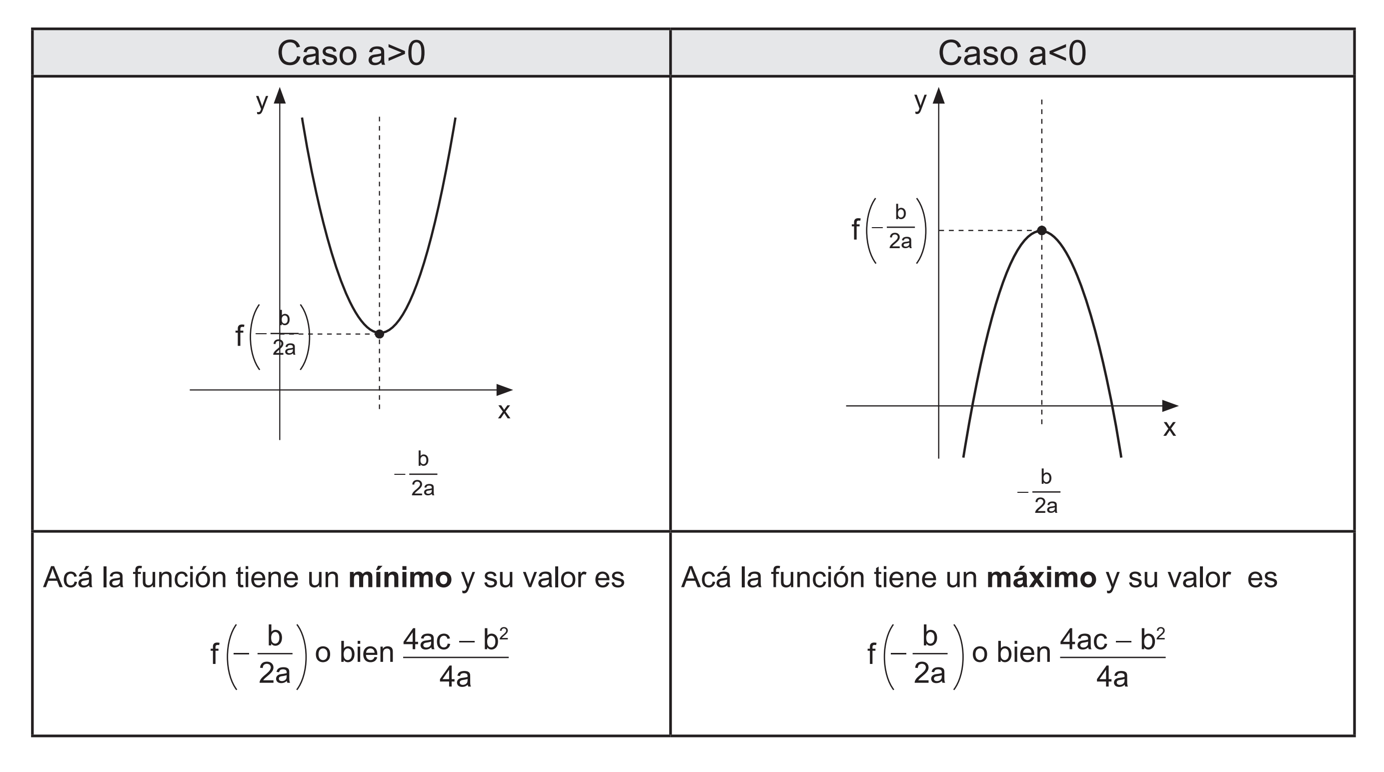
La abscisa del vértice corresponde a $x = -\dfrac{b}{2a}$ y su ordenada se puede calcular mediante $y = f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)$, o bien $y = \dfrac{-\Delta}{4a} = \dfrac{4ac - b^2}{4a}$

El eje de simetría es una recta que pasa por el vértice y es paralela al eje y, su ecuación es $x = -\dfrac{b}{2a}$.



- **Máximo o mínimo**

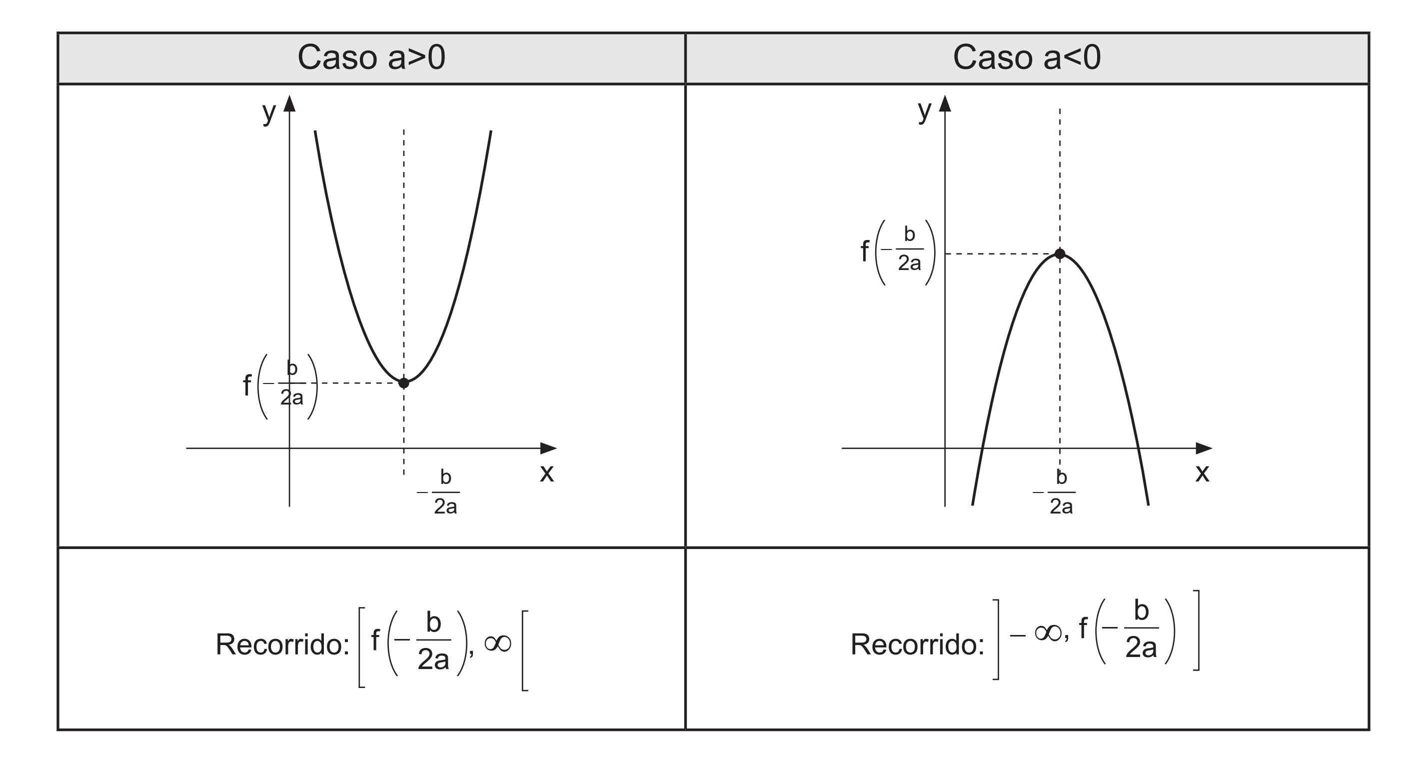
Tanto el mínimo como el máximo de la función cuadrática se encuentran en el vértice, pero habrá un mínimo cuando $a > 0$ y un máximo cuando $a < 0$.



Caso a>0	Caso a<0
Acá la función tiene un **mínimo** y su valor es $f\left(-\frac{b}{2a}\right)$ o bien $\frac{4ac-b^2}{4a}$	Acá la función tiene un **máximo** y su valor es $f\left(-\frac{b}{2a}\right)$ o bien $\frac{4ac-b^2}{4a}$

- **Dominio y Recorrido**

El dominio de la función $y = f(x)$ corresponde al conjunto de todos los valores de x y el recorrido corresponde a todos los valores de las imágenes.
El dominio de una función cuadrática corresponde al conjunto de los reales, Dom $f = \mathbb{R}$.
Mientras que el recorrido de la función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, depende del signo de a:



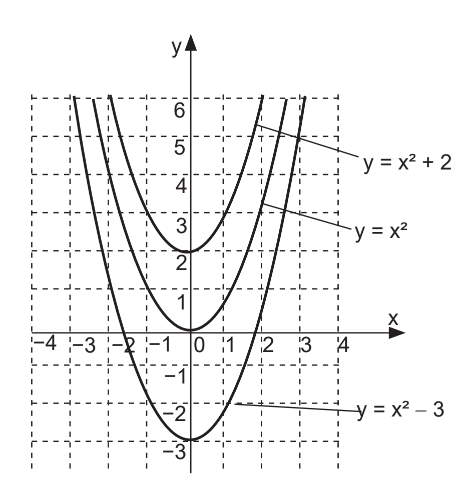
Caso a>0	Caso a<0
Recorrido: $\left[f\left(-\frac{b}{2a}\right), \infty \right[$	Recorrido: $\left] -\infty, f\left(-\frac{b}{2a}\right) \right]$

TRASLACIONES A LA GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN CUADRÁTICA

- **Traslación vertical**

Si a una función cuadrática se le suma una constante positiva "k", entonces su gráfico se traslada "k" unidades hacia arriba y si se le suma una constante negativa "k", el gráfico se traslada "k" unidades hacia abajo.

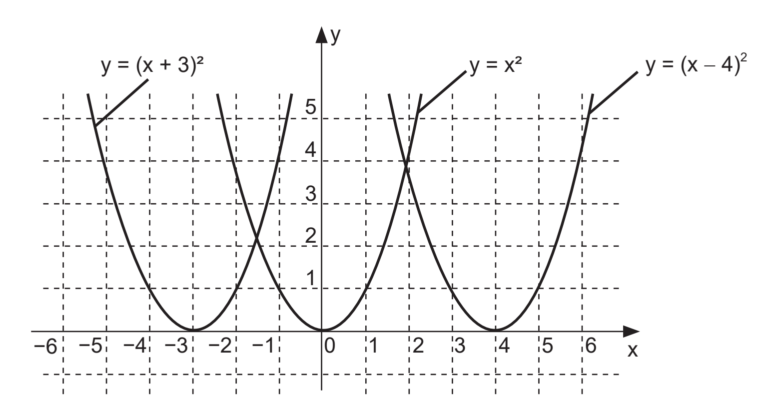
Ejemplos:



- **Traslación horizontal**

Si a la variable "x" de una función cuadrática se le suma una constante positiva "k", entonces su gráfico se traslada "k" unidades hacia la izquierda y si se le suma una constante negativa "k", el gráfico se traslada "k" unidades hacia la derecha.

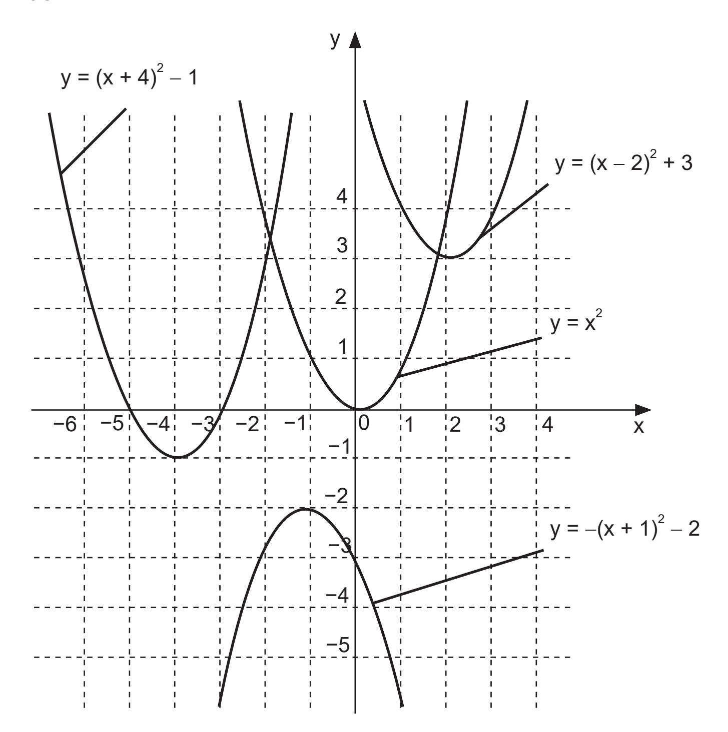
Ejemplos:



FORMA CANÓNICA DE LA FUNCIÓN CUADRÁTICA

Una función cuadrática de la forma: $f(x) = a(x - h)^2 + k$ se denomina la forma canónica de una función cuadrática.
Por lo visto anteriormente, si h y k son números reales positivos entonces la gráfica de $f(x) = a(x - h)^2 + k$ corresponde al gráfico de $f(x) = ax^2$ trasladado "h" unidades la derecha y "k" unidades hacia arriba.

Ejemplos:



EJERCICIOS RESUELTOS

1. ¿Cuál es la ecuación de segundo grado, cuyas soluciones son los números reales $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ y $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$?

Solución:

Habíamos visto que si x_1 y x_2 son las soluciones de una ecuación de segundo grado, la ecuación es:

$(x - x_1)(x - x_2) = 0$, o bien $x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 \cdot x_2 = 0$.

En este caso, $x_1 + x_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} + \frac{-1+\sqrt{5}}{2} = \frac{-2}{2} = -1$,

$x_1 \cdot x_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{-1+\sqrt{5}}{2} = \frac{(-1)^2 - (\sqrt{5})^2}{4} = -1$, luego la ecuación es

$x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 \cdot x_2 = 0 \leftrightarrow x^2 + x - 1 = 0$

2. Sea la ecuación cuadrática en x, $ax^2 - 2x + a = 0$, ¿cuál es el conjunto que determina todos los valores de **a** para los cuales la ecuación tiene soluciones reales y distintas?

Solución:
Para que la ecuación tenga soluciones reales y distintas debe ocurrir que el discriminante debe ser positivo:
$b^2 - 4ac > 0 \rightarrow 4 - 4 \cdot a \cdot a > 0 \rightarrow 4 - 4a^2 > 0 \rightarrow a^2 < 1 \rightarrow -1 < a < 1$, luego la respuesta es el intervalo $]-1, 1[$.

3. Sea la función f definida en los reales, mediante $f(x) = x^2 + 6x + a$, ¿cuáles de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

I) Si a = 9, la gráfica es una parábola que intersecta al eje x en un solo punto.
II) Si a < 9, entonces la parábola intersecta en dos puntos al eje x.
III) Si a > 9, entonces la parábola no intersecta al eje x.

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo II y III
E) I, II y III

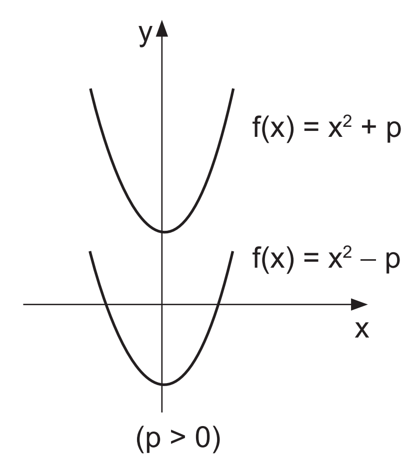
Solución:
En I, si la gráfica intersecta al eje x en un solo punto, entonces su discriminante debe ser cero:
$\Delta = b^2 - 4ac = 0 \rightarrow 36 - 4 \cdot 1 \cdot a = 0 \rightarrow a = 9$, entonces I es correcta.
En II, para que la parábola intersecte en dos puntos al eje x, debe ocurrir que el discriminante debe ser positivo:
$\Delta = b^2 - 4ac > 0 \rightarrow 36 - 4 \cdot 1 \cdot a > 0 \rightarrow a < 9$, entonces II es correcta.
Inversarmente, si la parábola no intersecta al eje x, debe ocurrir que el discriminante debe ser negativo:
$\Delta = b^2 - 4ac < 0 \rightarrow 36 - 4 \cdot 1 \cdot a < 0 \rightarrow a > 9$, entonces III es correcta.
Respuesta, E) I, II y III.

4. ¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) **siempre** verdadera(s) con respecto a la función definida en los reales mediante $f(x)=x^2 + p$, con $p \neq 0$?

I) El eje de simetría de la gráfica es el eje y.
II) Si $p > 0$, entonces el discriminante asociado a la función cuadrática es positivo.
III) El máximo de la función es p.

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo I y III
E) I, II y III

Solución:
Sabemos que el gráfico de $f(x) = x^2 + p$, corresponde a la gráfica de $g(x) = x^2$, desplazada "p" unidades hacia arriba o hacia abajo dependiendo si p es positivo o negativo.



Observa que en ambos casos, el eje de simetría es el eje y, entonces I es verdadero.
Si $p > 0$, el gráfico se trasladó "p" unidades hacia arriba, luego no intersecta al eje x, de lo que se deduce que su discriminante es negativo, por ende, II es falso.

El coeficiente de x^2 en la función, $f(x) = x^2 + p$ es positivo, luego sus ramas se abren hacia arriba, por lo tanto posee mínimo y no máximo, luego III es falso.
Respuesta: A) Solo I

EJERCICIOS DE PRÁCTICA

1. Las soluciones de la ecuación $2(x - 1)^2 = 5$ están representadas en:

A) $1 \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$

B) $-1 \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$

C) $1 \pm \sqrt{\frac{5}{2}}$

D) $-1 \pm \sqrt{\frac{5}{2}}$

E) $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

2. ¿En cuál de las siguientes ecuaciones cuadráticas, las soluciones son reales e iguales?

A) $x^2 - 4x = -1$

B) $x^2 - 2x = -4$

C) $2x^2 - 9 = 0$

D) $2x^2 + x = 1$

E) $4x^2 + 4x = -1$

3. ¿En cuál de las siguientes ecuaciones cuadráticas, las soluciones **no** son reales?

A) $x^2 + x = 1$

B) $x^2 - 2x = 4$

C) $2x^2 - 5x = -2$

D) $x^2 + x = 2$

E) $x^2 + 4x = -8$

4. Con respecto a las soluciones (o raíces) de la ecuación $x^2 + 4x = 32$, ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

I) Son racionales.

II) Son positivas.

III) Son números enteros.

A) Solo I

B) Solo I y II

C) Solo I y III

D) Solo II y III

E) I, II y III

5. Si una de las soluciones de la ecuación en x, $3x^2 + 5kx + 2 = 0$ es -2, entonces k =

A) -1

B) 1

C) $\frac{7}{5}$

D) $-\frac{7}{5}$

E) $-\frac{1}{3}$

6. Si x es la solución de la ecuación $-x = \frac{3}{x - 4}$, ¿cuál es el menor valor posible para la expresión: $\frac{3}{x - 4}$?

A) -4

B) -3

C) -1

D) 1

E) 3

7. ¿Cuál(es) de las siguientes ecuaciones **no** tienen soluciones en los números reales?

I) $2(x-2)^2 + 3 = 0$

II) $-\frac{3}{2}(x-1)^2 + 1 = 0$

III) $2\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + 5 = 0$

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo I y III
E) I, II y III

8. ¿Cuál de las siguientes ecuaciones tiene como raíces (o soluciones) a $(2 + \sqrt{5})$ y $(2 - \sqrt{5})$?

A) $x^2 - 4x + 9 = 0$
B) $x^2 + 4x + 9 = 0$
C) $x^2 - 4x + 1 = 0$
D) $x^2 - 4x - 1 = 0$
E) $x^2 - 2x - 1 = 0$

9. ¿Cuál de las siguientes ecuaciones tiene raíces (o soluciones) $(a + b)$ y $(a - b)$?

A) $x^2 + ax + a^2 - b^2 = 0$
B) $x^2 - ax + a^2 - b^2 = 0$
C) $x^2 + 2ax + a^2 - b^2 = 0$
D) $x^2 - 2ax + a^2 - b^2 = 0$
E) $x^2 - 2ax + a^2 + b^2 = 0$

10. Con respecto a las soluciones de la ecuación $x + \frac{2}{x-1} = 4$, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

A) Son reales de distinto signo.
B) Son racionales positivas.
C) No son reales.
D) Son racionales negativas.
E) Ninguna de ellas.

11. Las soluciones de la ecuación en x, $2x^2 - 4x + k = 0$ son reales y distintas, entonces:

A) $k > 2$

B) $k < 2$

C) $k \leq 2$

D) $k < \frac{1}{2}$

E) $k > 1$

12. Las soluciones de la ecuación en x, $bx^2 - bx + b + 1 = 0$, con $b \neq 0$, son reales e iguales, entonces b =

A) $-\frac{3}{4}$

B) $\frac{3}{4}$

C) $\frac{4}{3}$

D) $-\frac{4}{3}$

E) No existe tal valor de b.

13. Dada la ecuación en x, $(k - 1)x^2 + 2(k - 2)x + (k - 1) = 0$, ¿qué valor debe tomar **k** para que las raíces o soluciones sean reales e iguales?

A) $\frac{3}{2}$

B) $-\frac{2}{3}$

C) $-\frac{3}{2}$

D) $\frac{1}{2}$

E) No existe tal valor de k.

14. La ecuación en x, $(k - 2)x^2 + 2(k - 4)x + k - 4 = 0$, con k un número real distinto de 2, tiene dos soluciones que no son números reales, entonces:

A) $k > 4$
B) $k = 4$
C) $k < 4$
D) $k > 2$
E) $k < 2$

15. Sea la ecuación cuadrática en x, $a(x - b)^2 + b = c$, se puede determinar que las soluciones de esta ecuación son reales y distintas, sabiendo que:

(1) $c > b$
(2) $a(b - c) < 0$

A) (1) por sí sola
B) (2) por sí sola
C) Ambas juntas, (1) y (2)
D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)
E) Se requiere información adicional

16. Dada la ecuación $x^2 + 10x - 15 = 0$, ¿qué número real p se debe sumar a ambos lados de la ecuación para completar el cuadrado de un binomio en el lado izquierdo de ella y cuáles son las soluciones de esta ecuación?

A) p = 40 y las soluciones son $(-5 - \sqrt{115})$ y $(-5 + \sqrt{115})$.
B) p = – 10 y las soluciones son $(10 - \sqrt{5})$ y $(10 + \sqrt{5})$.
C) p = 40 y las soluciones son $(-5 - \sqrt{40})$ y $(-5 + \sqrt{40})$.
D) p = – 25 y las soluciones no son reales.
E) p = 25 y las soluciones no son reales.

17. **a** y **b** son números reales, ¿cuál(es) de las siguientes ecuaciones en x, tiene(n) **siempre** solución(es) en el conjunto de los números reales?

I) $(x - b)^2 - \frac{a}{b} = 0$, con $ab>0$.
II) $ax^2 + b = a$, con $a > b$.
III) $ax^2 + b = 0$, con $ab < 0$.

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo I y III
E) I, II y III

18. El área de un rectángulo es 50 cm^2 y su perímetro es 30 cm. ¿Cuál de las siguientes ecuaciones permite determinar su largo “x”?

A) $x^2 - 15x - 50 = 0$
B) $x^2 + 15x + 50 = 0$
C) $x^2 - 15x + 50 = 0$
D) $x^2 - 30x + 50 = 0$
E) $x^2 + 30x + 50 = 0$

19. Se tienen tres números consecutivos donde el menor es “x”.
Si el doble del producto de los dos menores tiene 20 unidades más que el cuadrado del mayor, ¿cuál de las siguientes ecuaciones permite determinar el menor de los términos?

A) $2x(x + 1) + 20 = (x + 2)^2$
B) $2x(x + 1) - 20 = (x + 2)^2$
C) $2x(x + 1) = (20 + x + 2)^2$
D) $2x(x + 1) = 20 - (x + 2)^2$
E) $2x(x + 1) = (20 - (x + 2))^2$

20. La edad de un hermano es el doble de la edad del otro más cuatro años.
Si el producto de sus edades es 160, ¿cuál es la edad del mayor?

A) 8 años
B) 10 años
C) 16 años
D) 20 años
E) 24 años

21. En un rectángulo, el largo mide 2 cm más que el ancho. Si los lados se aumentan en 2 cm, se forma un segundo rectángulo cuya área sumada con la del primero resulta 288 cm^2. ¿Cuánto mide el ancho del rectángulo original?

A) 8 cm
B) 10 cm
C) 12 cm
D) 14 cm
E) 18 cm

22. Las aristas de un cubo disminuyen en 2 cm, disminuyendo el volumen del cubo en 296 cm^3. ¿Cuánto medían inicialmente las aristas?

A) 4 cm
B) 6 cm
C) 8 cm
D) 36 cm
E) 48 cm

23. Un número tiene dos cifras, tales que la de las decenas tiene una unidad más que el doble de la otra. Si al número se le suma el producto de las cifras resulta 94, entonces ¿cuál es la diferencia de las cifras?

A) 2
B) 3
C) 4
D) 7
E) 8

24. Por el arriendo de una casa en la playa, a un grupo de amigos le cobran $ 60.000 por el fin de semana. Para cancelar este valor lo dividieron en partes iguales, pero posteriormente dos de ellos no pudieron asistir por lo que la cuota tuvo que subir en $ 1500 para reunir el total del arriendo, entonces ¿cuántos amigos iban a ir al comienzo?

A) 7
B) 8
C) 10
D) 12
E) 15

25. Un campesino ha plantado lechugas en filas, poniendo en cada una de ellas la misma cantidad, de modo que la cantidad de lechugas por fila supera en dos a la cantidad de filas.
Al otro año decide aumentar en cuatro la cantidad de filas y disminuir en dos la cantidad de lechugas por fila.
Si la cantidad de lechugas plantadas durante los dos años es 756, ¿cuántas fueron plantadas en cada fila en el primer año?

A) 20
B) 22
C) 24
D) 25
E) 26

26. La gráfica de la función f definida en los reales mediante $f(x) = x^2 + a$, pasa por el punto (a, 2), entonces el (los) valor(es) de a es (son):

A) Solo 1
B) Solo –1
C) –2 o 1
D) Solo –2
E) No existen tales valores.

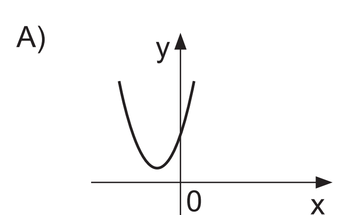
27. Con respecto a la parábola de ecuación: $y = -x^2 + 4x - 3$, se afirma que:

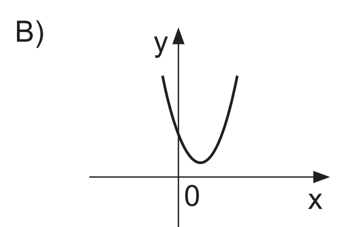
I) Intercepta al eje y en (0,–3).
II) Intercepta al eje x en dos puntos.
III) Su vértice es el punto (–2,–7).

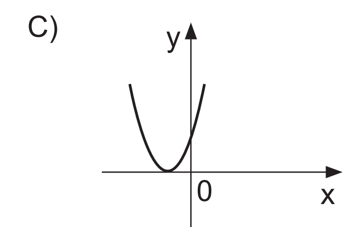
¿Cuál(es) de las afirmaciones anteriores es (son) verdadera(s)?

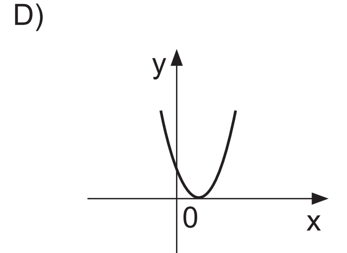
A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo II y III
E) I, II y III

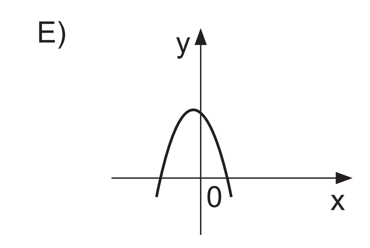
28. ¿Cuál de los siguientes gráficos representa mejor a la función cuadrática: $y = x^2 - 6x + 9$?

A)


B)


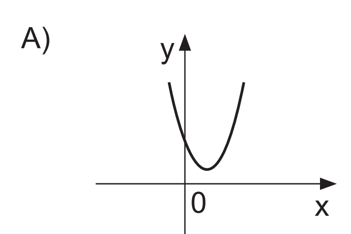
C)


D)


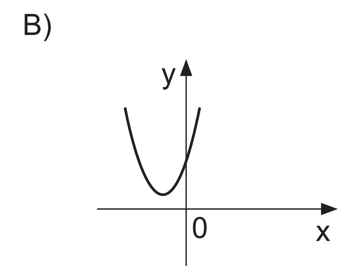
E)


29. ¿Cuál de los siguientes gráficos representa mejor a la función: $f(x) = (x + 2)^2 + 1$?

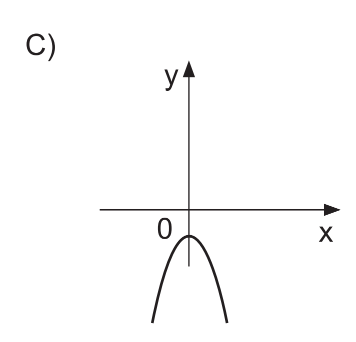
A)



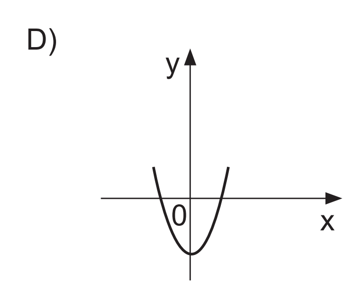
B)



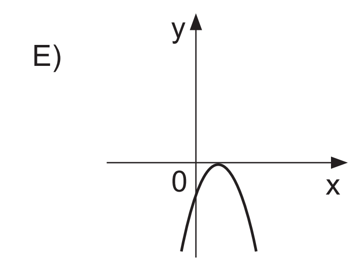
C)



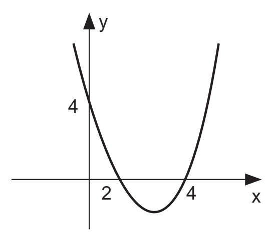
D)



E)



30. ¿Cuál de las siguientes funciones definidas en los reales, tiene como gráfico la parábola de la figura?



A) $g(x) = (x - 3)^2 + 1$

B) $h(x) = -(x - 3)^2 - 1$

C) $j(x) = (x - 3)^2 + 2$

D) $k(x) = 2(x - 2)(x - 4)$

E) $m(x) = \frac{1}{2}(x - 2)(x - 4)$

31. Sea la función f definida en los reales, mediante $f(x) = -2(x - 3)(x - 5)$, entonces las coordenadas del vértice de la parábola asociada a su gráfica son:

A) (4, –2)
B) (4, 2)
C) (4, –1)
D) (4, 1)
E) (2, –6)

32. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA** con respecto a la función $f(x) = -(x^2 + 4)$ si el dominio son todos los números reales?

A) La gráfica no intersecta al eje x.
B) El vértice de la parábola asociada a esta función está en el eje y.
C) El vértice de la parábola asociada a esta función está en el eje x.
D) Su gráfica tiene al eje y como eje de simetría.
E) El valor de x donde alcanza su máximo es x = 0.

33. ¿Cuál de las siguientes funciones definidas en los reales, tiene como recorrido los reales menores o iguales que -1?

A) $g(x) = (x - 3)^2 - 1$

B) $h(x) = -(x - 3)^2 + 1$

C) $j(x) = -(x - 1)^2 + 2$

D) $k(x) = -(x - 1)^2 - 2$

E) $t(x) = -(x - 4)^2 - 1$

34. Sea f una función cuyo dominio es el conjunto de los números reales, definida por $f(x) = a(x - 2)^2 + 1$, con a un número real distinto de cero. ¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

I) Si $a > 0$, el valor mínimo de f se alcanza para $x = 2$.

II) Si $a < 0$, el recorrido de f es $]-\infty, 1]$.

III) Si la gráfica pasa por el origen, entonces $a = -\frac{1}{4}$.

A) Solo I

B) Solo II

C) Solo I y II

D) Solo II y III

E) I, II y III

35. Se puede determinar la función cuadrática, definida en los reales mediante $f(x) = ax^2 + c$, sabiendo que:

(1) La gráfica asociada a esta función pasa por el punto (1,4).

(2) Su mínimo es $y = 1$.

A) (1) por sí sola

B) (2) por sí sola

C) Ambas juntas, (1) y (2)

D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)

E) Se requiere información adicional

36. ¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s), con respecto a las funciones de la forma $f(x) = (a - 1)x^2 - a$ con dominio los números reales?

I) Si $a > 1$, entonces la gráfica de la función es una parábola que se abre hacia arriba.

II) La gráfica de f intersecta al eje de las ordenadas en el punto $(0, -a)$.

III) Si $a < 1$, entonces el mínimo de la función es $-a$.

A) Solo I

B) Solo II

C) Solo I y II

D) Solo II y III

E) I, II y III

37. Sea f una función cuyo dominio es el conjunto de los números reales, definida por $f(x) = ax^2 + (a + 2)x + 2$, con $a \neq 0$.
¿Cuál de las siguientes relaciones se debe cumplir, para que la gráfica de la función intersecte al eje x en un solo punto?

A) $a = -2$

B) $a = 2$

C) $a^2 - 4a + 4 > 0$

D) $a^2 - 4a + 4 < 0$

E) $\dfrac{-(a + 2) + \sqrt{(a + 2)^2 - 8}}{2a}$

38. Sea f una función definida en los reales mediante $f(x) = x^2 - 4bx - 2$, con $b \neq 0$, entonces el valor de x donde la función alcanza su valor mínimo es:

A) $2b$

B) $-2b$

C) b

D) $4b^2 + 2$

E) $-4b^2 - 2$

39. ¿Cuál es el conjunto de todos los valores de a, para que la función definida por $f(x) = (x - a)^2 + 4a$, intersecte al eje x en dos puntos?

A) $]0, \infty[$
B) $]-\infty, 0[$
C) $]-\infty,0]$
D) $[0, \infty[$
E) $\varnothing$

40. La gráfica de la función $f(x) = (a - 2)x^2 + 2(a - 1)x + a - 1$, con $a \neq 2$ y dominio los números reales, intersecta en dos puntos al eje x, si:

A) $a < 1$
B) $a = 1$
C) $a > 1$
D) $a > 2$
E) $a < 2$

41. Sea la función definida en los reales, mediante $f(x) = a(x - h)^2 + k$, con $a \neq 0$.
Se puede determinar el eje de simetría de la parábola que representa a la gráfica de esta función sabiendo que:

(1) $h = 3$.
(2) El vértice de la parábola es el punto (3,2).

A) (1) por sí sola
B) (2) por sí sola
C) Ambas juntas, (1) y (2)
D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)
E) Se requiere información adicional

42. Sea la función cuadrática $f(x) = x^2 - ax - 2a^2$ con $a \neq 0$ y dominio el conjunto de los números reales. ¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

I) La gráfica intercepta al eje x en dos puntos, para todo valor de **a**.
II) El valor mínimo de la función es $-\frac{9a^2}{4}$.
III) La gráfica asociada a esta función pasa por el punto $(-2a, -4a^2)$.

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo II y III
E) I, II y III

43. ¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) **siempre** verdadera(s) con respecto a la función definida en los reales mediante $f(x) = ax^2 + bx + c$, con $a \neq 0$?

I) Si $b = 0$, el mínimo es $y = c$.
II) Si $c = 0$, uno de los ceros de la función es $x = -\frac{b}{a}$.
III) Si $b = 0$ y $c = 0$, entonces su gráfico intersecta a los ejes en el origen.

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo II y III
E) I, II y III

44. ¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) **siempre** verdadera(s) con respecto a la función definida en los reales mediante $f(x) = (x - p)^2$?

I) El vértice de la parábola asociada a su gráfica está en el eje x.
II) La ordenada del punto donde la gráfica intercepta al eje y es positiva.
III) El eje de simetría de la gráfica es la recta de ecuación $x = p$.

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo I y III
E) I, II y III

45. Sea f una función definida en los reales mediante $f(x) = x^2 - ax + 6$, con $a \neq 0$. Si el valor de x donde la función alcanza su valor mínimo es -2, entonces a =

A) 4
B) -8
C) -4
D) 4 o -4
E) $-\sqrt{32}$ o $\sqrt{32}$.

46. La función $h(t) = pt - 5t^2$, modela la altura (en metros) que alcanza un proyectil al ser lanzado verticalmente hacia arriba a los t segundos. Se puede determinar esta función si se sabe que:

(1) A los 2 segundos alcanza una altura de 30 metros.
(2) La altura máxima la alcanza a los 2,5 segundos.

A) (1) por sí sola
B) (2) por sí sola
C) Ambas juntas, (1) y (2)
D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)
E) Se requiere información adicional

47. Las ganancias de una empresa, medidas en millones de dólares, se modelan según la función cuadrática

$G(t) = -\frac{6}{32}(t - 9)^2 + 12$, donde t es la cantidad de años desde que fue inaugurada. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?

A) A los 9 años se obtuvo la máxima ganancia.
B) Al primer año no obtuvo ganancia.
C) A los 8 y a los 10 años obtuvo la misma ganancia.
D) Después de los 9 años sus ganancias empezaron a disminuir.
E) La ganancia anual siempre fue inferior a 12 millones de dólares.

48. La altura h(t) alcanzada, medida en metros, de un proyectil se modela mediante la función $h(t) = 20t - 5t^2$, donde t es la cantidad de segundos que transcurren hasta que alcanza dicha altura.
¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

I) A los 4 segundos llega al suelo.
II) A los 2 segundos alcanza su altura máxima.
III) Al primer y tercer segundo después de ser lanzado alcanza la misma altura.

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo II y III
E) I, II y III

49. Se puede determinar el valor numérico del máximo de la función cuadrática $f(x) = -x^2 + 2ax - a$, si se conoce:

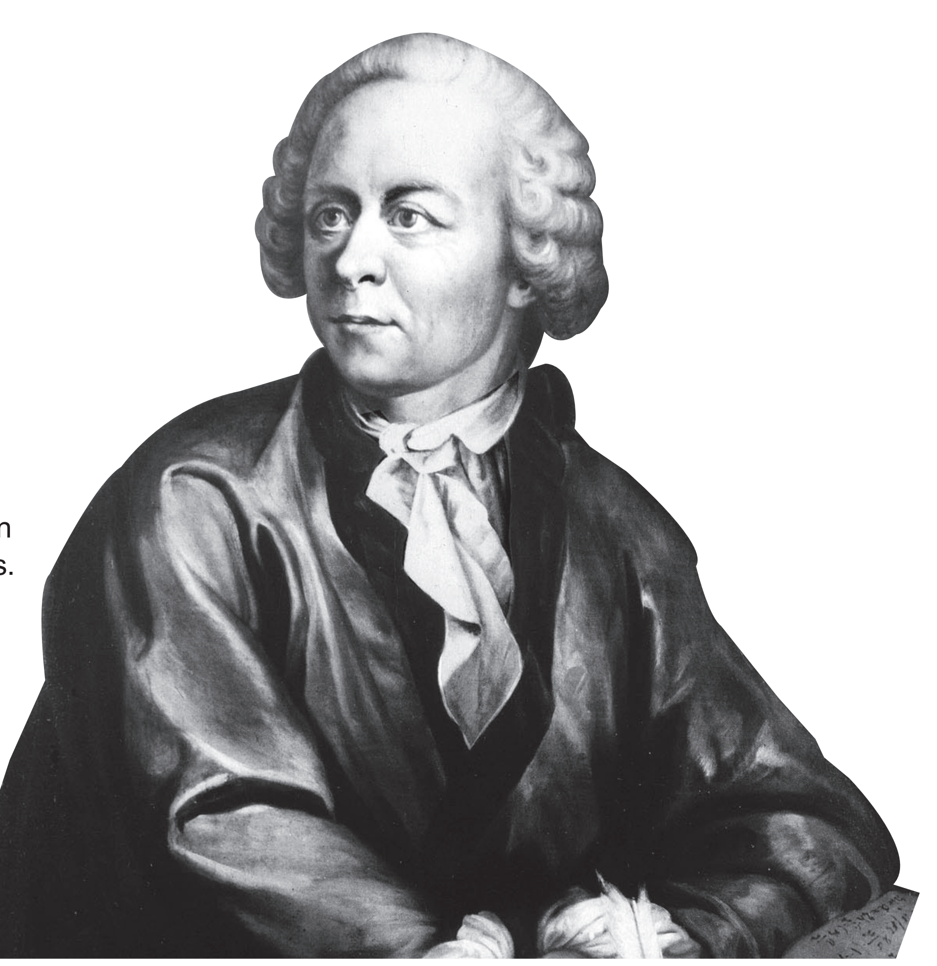
(1) El valor numérico de la abscisa del vértice de la parábola asociada a la gráfica de esta función.
(2) El valor numérico de uno de los ceros de esta función.

A) (1) por sí sola
B) (2) por sí sola
C) Ambas juntas, (1) y (2)
D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)
E) Se requiere información adicional

RESPUESTAS CAPÍTULO 6									
1. C	**2.** E	**3.** E	**4.** C	**5.** C	**6.** B	**7.** D	**8.** D	**9.** D	**10.** B
11. B	**12.** D	**13.** A	**14.** A	**15.** B	**16.** C	**17.** D	**18.** C	**19.** B	**20.** D
21. B	**22.** C	**23.** C	**24.** C	**25.** A	**26.** C	**27.** C	**28.** D	**29.** B	**30.** E
31. B	**32.** C	**33.** E	**34.** E	**35.** C	**36.** C	**37.** B	**38.** A	**39.** B	**40.** C
41. D	**42.** C	**43.** D	**44.** D	**45.** C	**46.** D	**47.** E	**48.** E	**49.** D	

Capítulo
3

FUNCIONES



Leonhard Euler (1707 – 1783), matemático suizo, considerado uno de los matemáticos más importantes de todos los tiempos, el número irracional e=2,71828…, se designa con esta letra en su honor. Fue el primero en introducir la notación f(x) para designar a las funciones.

CONCEPTOS CLAVES

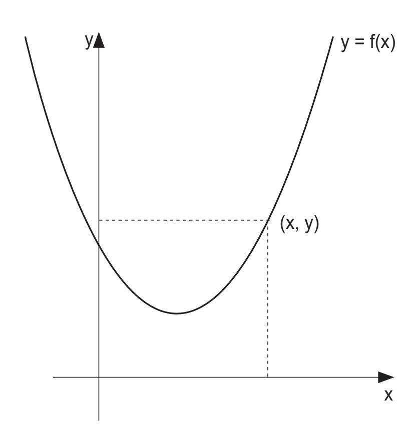
- Dominio y Recorrido
- Imágenes y preimágenes
- Gráficos de funciones
- Traslación de gráficos
- Función compuesta

CONCEPTO DE FUNCIÓN

Una función f definida de A a B relaciona los elementos de A con los de B, de modo que

(1) Todo elemento de A está relacionado con un elemento de B.
(2) Todo elemento de A se relaciona con un único elemento de B.

A se denomina el conjunto de partida y B el conjunto de llegada, al elemento del conjunto de partida se llama preimagen y al elemento con que se relaciona de B se llama imagen y se designa con la letra y.
Si la función la designamos con la letra f, entonces la notación y = f(x) hace alusión que "y" es la imagen de "x"(o que "x" es la preimagen de "y"). El conjunto de las preimágenes se llama dominio y el conjunto de las imágenes se llama recorrido.
En un sistema cartesiano, la imagen la pondremos en el eje vertical o eje de las ordenadas y la preimagen en el eje horizontal o eje de las abscisas.



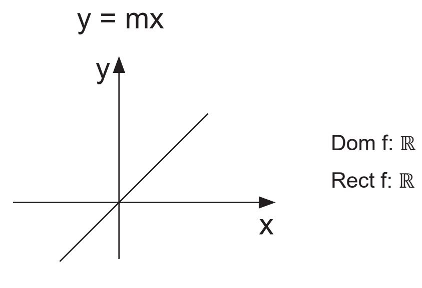
El gráfico de la función está formado por puntos (x,y) donde y = f(x).

GRÁFICOS DE FUNCIONES IMPORTANTES

Es importante comprender y recordar las gráficas de las siguientes funciones:

- **Función lineal y afín**

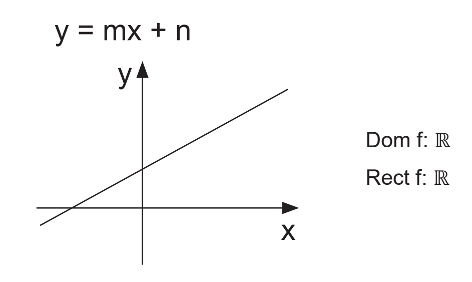
y = mx



Dom f: $\mathbb{R}$
Rect f: $\mathbb{R}$

f.lineal (pasa por el origen)

y = mx + n



Dom f: $\mathbb{R}$
Rect f: $\mathbb{R}$

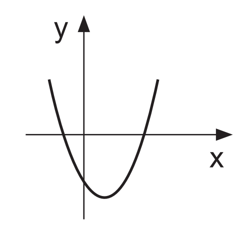
f.afín (no pasa por el origen)

- **Función constante** y=x

Dom f: $\mathbb{R}$

Rec f: {k}

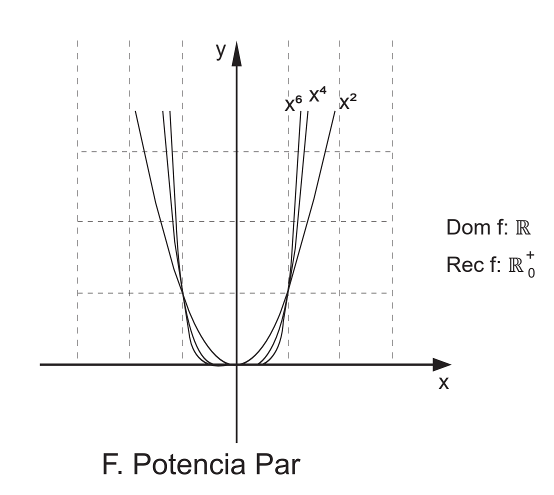
- **Función cuadrática (vista en cap. anterior)** $y = ax^2 + bx + c$



Dom f: $\mathbb{R}$

Rec f: $\left[\dfrac{4ac - b^2}{4a}, \infty\right[$ si a > 0 o $\left]-\infty, \dfrac{4ac - b^2}{4a}\right]$ si a < 0

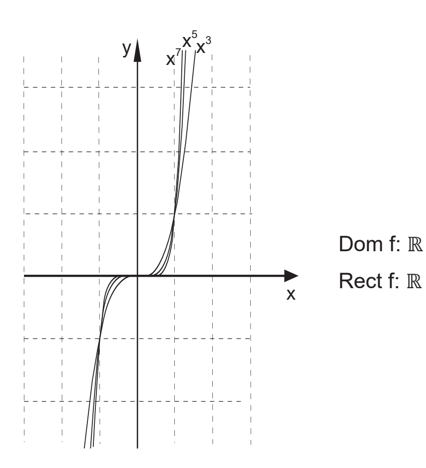
- **Función potencia** $y = x^n$ $(n \in \mathbb{Z})$



F. Potencia Par

Dom f: $\mathbb{R}$

Rec f: $\mathbb{R}_0^+$

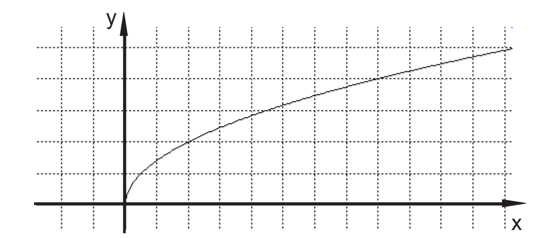


F. Potencia impar

Dom f: $\mathbb{R}$

Rect f: $\mathbb{R}$

- **Función raíz cuadrada** $y = \sqrt{x}$ * corresponde a la función inversa de la función cuadrática



Dom f: $\mathbb{R}_0^+$

Rec f: $\mathbb{R}_0^+$

COMPOSICIÓN DE FUNCIONES

Supongamos que tenemos las funciones f y g, se denomina la composición f o g, diremos "f" compuesto con "g", a la función que resulta de que primero actúa la función "g" y sobre esta imagen obtenida actúa posteriormente la función "f".

Por definición, se tiene que $(fog)(x) = f(g(x))$.

Por ejemplo, supongamos que tenemos las funciones $f(x) = x^2 + x + 5$ y $g(x) = 2x + 3$, entonces $(fog)(x) = f(g(x))$, si sustituimos $g(x)$ por $2x + 3$, nos queda $f(2x + 3)$, ahora sustituimos $2x + 3$ en la "x" de la función f:

$f(2x + 3) = (2x + 3)^2 + (2x + 3) + 5$, desarrollando y reduciendo términos obtenemos que $(fog)(x) = 4x^2 + 14x + 17$.

Ahora calcularemos $(gof)(x)$, tenemos que $(gof)(x) = g(f(x)) = g(x^2 + x + 5) = 2(x^2 + x + 5) + 3 = 2x^2 + 2x + 13$.

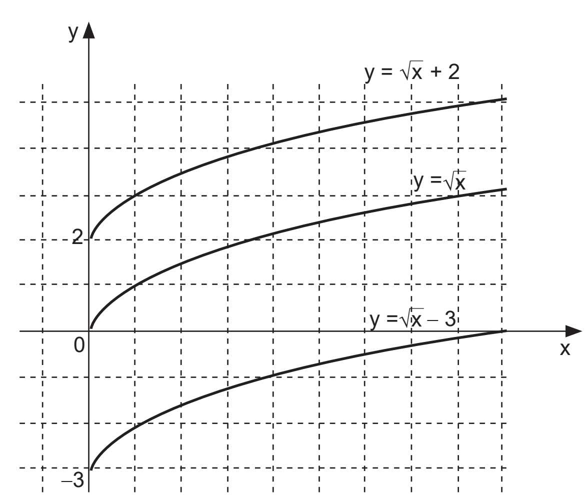
Como habrás observado, en general la composición de funciones no es conmutativa, es decir $(fog)(x) \neq (gof)(x)$.

TRANSFORMACIONES A LAS GRÁFICAS DE FUNCIONES

Veremos a continuación como algunos cambios en la ecuación de una función modifica el gráfico de esta.

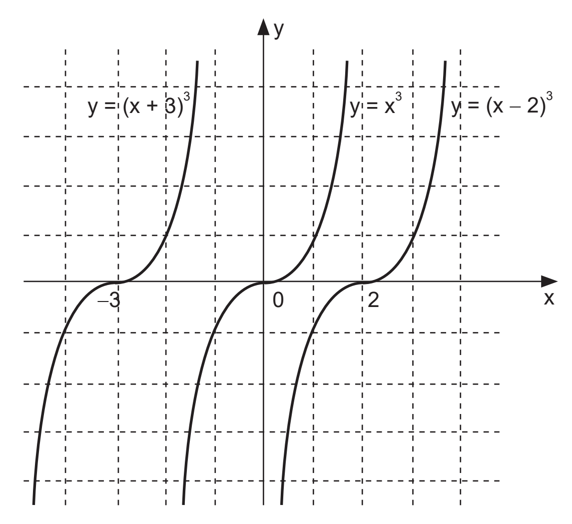
- **Traslación vertical**
  Si en la función $y = f(x)$ le sumamos o restamos una constante positiva "k" a $f(x)$ entonces la gráfica se traslada respectivamente hacia arriba o hacia abajo en "k" unidades.

Ejemplo:



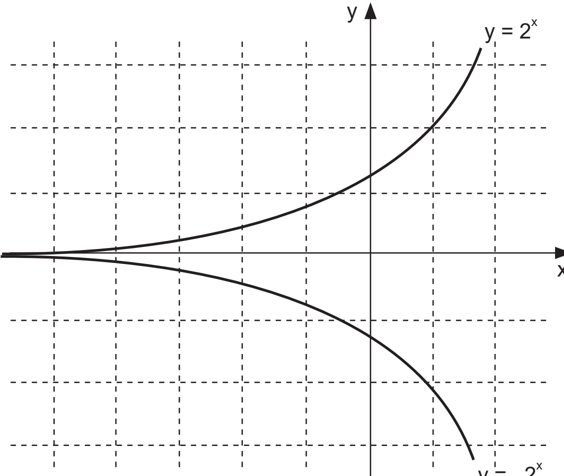
- **Traslación horizontal**
  Si en la función y = f(x) le sumamos o restamos una constante positiva “k” a la variable “x” entonces la gráfica se traslada respectivamente hacia la izquierda o hacia la derecha en “k” unidades.

  Ejemplo:



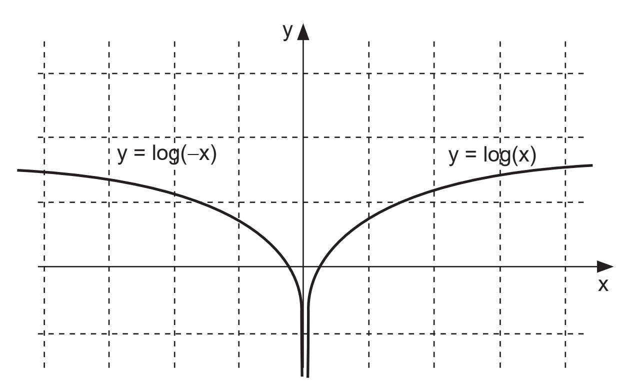
- **Reflexión en torno al eje x**
  Si en la función y = f(x), cambiamos el signo a f(x) entonces la gráfica se refleja en torno al eje x.

  Ejemplo:



- **Reflexión en torno al eje y**
  Si en la función y = f(x), cambiamos el signo de "x" entonces la gráfica se refleja en torno al eje y.

  Ejemplo:



EJERCICIOS RESUELTOS

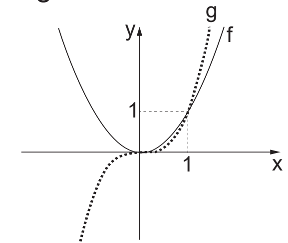
1. Sea la función f, cuyo dominio es el intervalo [h, ∞[, definida por $f(x) = \sqrt{x - h} + 2$.
Si la preimagen de 6 es 4, ¿cuál es el valor de h?

Solución:
Según la información dada, tenemos que f(4) = 6, o bien, que x = 4 si y = 6, reemplazando esto en la ecuación $y = \sqrt{x - h} + 2$, obtenemos $6 = \sqrt{4 - h} + 2$, si transponemos el 2 y elevamos al cuadrado a ambos lados de la ecuación, se tiene 16 = 4 – h , por lo tanto h = –12.

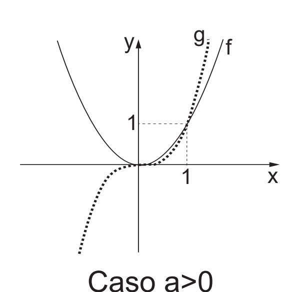
2. Sean las funciones definidas en los reales mediante $f(x) = ax^2$ y $g(x) = ax^3$, con $a \neq 0$, ¿cuáles de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

I) Si a > 0 y x < 1, entonces f < g.
II) Las gráficas se intersectan en dos puntos.
III) Si a < 0 y x > 1, entonces g < f.

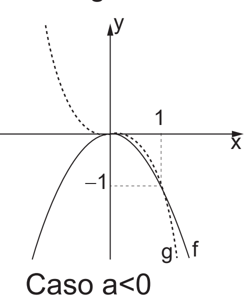
Solución:
En la siguiente gráfica se muestra el caso en que a > 0, observa que si x < 1, entonces f > g, luego I es falsa.



II) Es verdadera, ya que tanto para a>0 y a<0, las gráficas se interceptan en el (0,0) y en el (1,1).

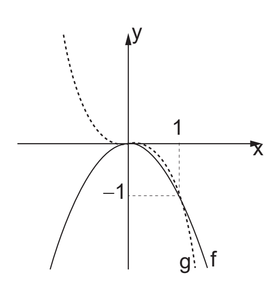


Caso a>0



Caso a<0

III) Si a<0 y x>1, observa en la siguiente gráfica que efectivamente g < f, luego III es verdadera.



Conclusión, II y III son verdaderas.

3. Un técnico cobra un costo fijo por la visita a domicilio más un cierto valor por hora trabajada. Se sabe que por 3 horas cobra \$57.000 y por 4 horas \$72.000. Determina la función que modela el costo según la cantidad x de horas trabajadas.

Solución:
Supongamos que por la visita a domicilio cobra \$a y que cobra \$b por cada hora de trabajo, entonces el costo por t horas de trabajo está dado por la función C(t)=a+bt.
Tenemos que para 3 horas cobra \$57.000, entonces a+3b=57000, por 4 horas cobra \$57.000, entonces a+4b=72.000.
Resolviendo el sistema de ecuaciones: $\begin{array}{c|} a + 3b = 57000 \\ a + 4b = 72000 \end{array}$, obtenemos que b=15.000 y a=12.000,

luego la función que determina el costo a cancelar por x horas de trabajo es C(x)=12000+15000x.

4. Un modelo para la temperatura T, en grados Celcius (°C), de un líquido está dada por T(t) = 80 – 2t, donde t es el tiempo transcurrido en minutos.
¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

I) A los 12 minutos la temperatura del líquido será de 56 °C.
II) Para que la temperatura del líquido llegue a 0° C se requieren más de 30 min.
III) La temperatura disminuye a razón de 2 °C por minuto.

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo II y III
E) I, II y III

Solución:

En I, para obtener la temperatura que habrá a los 12 minutos, basta reemplazar t por 12 en la función dada: $T(12) = 80 - 2 \cdot 12 = 56$, por lo tanto I es correcta.
En II, reemplazamos la temperatura por 0 °C, $0 = 80 - 2t$, despejando t se obtiene t=40, luego a los 40 minutos el líquido tendrá 0 °C, luego II es correcta.
La función $T(t) = 80 - 2t$, es de la forma y=mx+n, es decir es una función afín con pendiente m igual a -2, esto indica que la variable dependiente, en este caso la temperatura, disminuye 2 °C por cada unidad que aumenta la variable independiente, en este caso el tiempo, luego III es también es correcta.
Respuesta, E) I, II y III.

5. Sea la función f definida en los reales, mediante $f\left(\frac{x+2}{3}\right) = x^2 - 6x$, entonces f(x)=

Solución:

Lo que haremos para resolver esta situación es hacer un cambio de variable.

Para ello a la expresión $\frac{x+2}{3}$ la designaremos con una nueva letra, por ejemplo u, entonces:

$u = \frac{x+2}{3}$, en esta ecuación despejamos x, con lo que obtenemos x=3u-2, entonces la expresión dada $f\left(\frac{x+2}{3}\right) = x^2 - 6x$, se transforma en $f(u) = (3u - 2)^2 - 6(3u - 2)$, desarrollando y reduciendo

términos, obtenemos $f(u) = 9u^2 - 30u + 16$, ahora cambiamos "u" por "x" y obtenemos finalmente que $f(x) = 9x^2 - 30x + 16$

6. Sea f una función definida en los reales mediante f(x+2)=2f(x)+5. Si f(6)=59, entonces f(0)=

Solución:

Como acá no tenemos explícitamente la función f, lo que haremos es darnos diversos valores para "x" de modo de relacionar las preimágenes 0 y 6.
Si nos damos el valor x=4, en la expresión dada podemos formar al lado izquierdo f(6) cuyo valor conocemos, entonces:

(1) Si x=4 $\rightarrow$ f(6) = 2f(4)+5
(2) Si x=2 $\rightarrow$ f(4) = 2f(2)+5
(3) Si x=0 $\rightarrow$ f(2) = 2f(0)+5

En (1) reemplazamos f(6) por 59 y despejamos f(4) lo cual nos da 27, reemplazamos f(4)=27 en (2) y despejamos f(2) lo que da 11, reemplazando f(2)=11 en (3), despejamos f(0) y obtenemos 3.

Respuesta f(0)=3

EJERCICIOS DE PRÁCTICA

1. Si $f(x) = x^2 - 2x - 3$, entonces $f(2) + f(-1) =$

A) -7
B) -6
C) -3
D) 3
E) 5

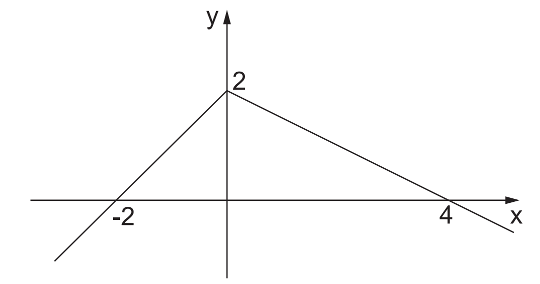
2. Sea la función $f(x) = 2x + 3$, entonces $f(a + b) - f(b) =$

A) $2a$
B) $2a + 6$
C) $2a - 3$
D) $2a - b$
E) $2a - b + 6$

3. Si $f(x) = ax + b$, ¿cuánto valen **a** y **b** respectivamente, si $f(2) = -1$ y $f(3) = -2$?

A) -1 y -1
B) -1 y 1
C) -2 y -1
D) -2 y 1
E) -3 y 5

4. En la figura adjunta se muestra la gráfica de la función f definida en los reales.
¿Cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?



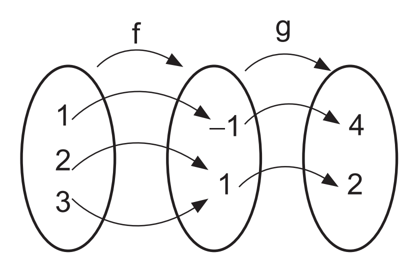
A) El máximo de la función es 2.
B) El recorrido de la función es $]-\infty , 2]$.
C) La imagen de 6 es -1.
D) Las preimágenes de 1 son -1 y 2.
E) Todo elemento del recorrido tiene 2 preimágenes.

5. Sea la función definida en los reales mediante $f(x)=ax^n$, se puede determinar **a** y **n** sabiendo que:

(1) $f(2) = -16$
(2) $f(3) = -54$

A) (1) por sí sola
B) (2) por sí sola
C) Ambas juntas, (1) y (2)
D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)
E) Se requiere información adicional

6. Sean las funciones f y g que se ilustran en el diagrama siguiente:



¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

I) gof (2) = 2
II) gof (1) = 4
III) gof (3) = 2

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo II y III
E) I, II y III

7. Sean las funciones f y g definidas en los reales mediante $f(x) = 2x–1$ y $g(x) = x^2$, entonces ¿cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?

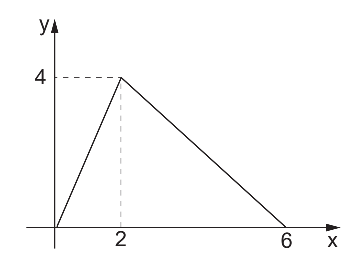
A) (g o f)(5) = 81
B) (f o g)(x) = $2x^2–1$
C) Existe más de un valor de x de modo que (g o f)(x) = (f o g)(x)
D) El recorrido de (f o g)(x) es el intervalo [-1, ∞[.
E) El recorrido de (g o f)(x) es el intervalo [0, ∞[.

8. Sea f una función cuyo dominio es el conjunto {2,4,6}, definida por f(x) = x–1, sea g una función con dominio {1,3,5}, definida por g(x) = x+1 y sea h una función con dominio {1,2,3,4,5,6} definida por h(x) = 2x. ¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

I) 2 **no** pertenece al dominio de f o (g o h).
II) 2 **no** pertenece al dominio de g o (f o h).
III) 2 **no** pertenece al dominio de h o (f o g).

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo I y III
E) I, II y III

9. En la figura se muestra la gráfica de la función f definida en:



¿Cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?

A) (f o f) (2) = 2
B) (f o f) (4) = 4
C) (f o f) (1) = 4
D) (f o f) (5) = 1
E) (f o f) (3) = 3

10. Sean las funciones f y g definidas en el conjunto de los números reales mediante $f(x) = x^2$ si $x>1$ y $2x - 3$ si $x \leq 1$; $g(x) = -x+2$ si $x>0$ y $3x^2 - 2$ si $x \leq 0$

¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

I) $fog(2) = -3$

II) $gof(3) = -7$

III) $go(fog)(-1) = 1$

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo II y III
E) I, II y III

11. Si f y g son funciones definidas en el conjunto de los números reales mediante $f(x+2) = 3x+1$ y $g(x+2) = 2x-1$, entonces $(f \circ g)(x) =$

A) $(3x - 1)(2x - 3)$
B) $6x - 20$
C) $6x - 6$
D) $6x - 5$
E) $6x - 15$

12. Sean f y g funciones definidas en los reales, se puede determinar (fog)(5), sabiendo que:

(1) $g(5) = -10$ y $f(-10) = -3$.

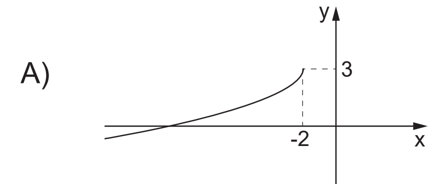
(2) $(fog)(2x+1) = -4x+5$

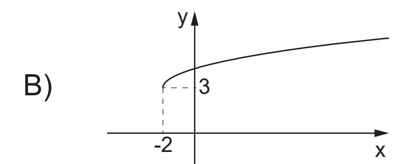
A) (1) por sí sola
B) (2) por sí sola
C) Ambas juntas, (1) y (2)
D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)
E) Se requiere información adicional

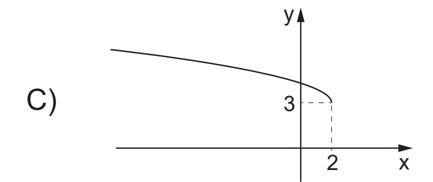
13. Sea la función f definida por $f(x) = \sqrt{2x + k}$, cuyo dominio es el intervalo $\left[-\frac{k}{2}, \infty\right[$. Si la preimagen de 5 es 11, ¿cuál es el valor de k?

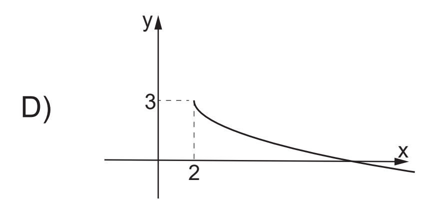
A) -17
B) 1
C) 3
D) 14
E) 111

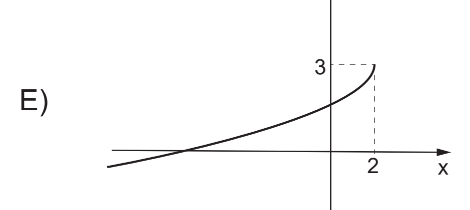
14. ¿Cuál de las siguientes gráficas representa mejor a la gráfica de la función $f(x)= -\sqrt{2 - x} + 3$?

A) 

B) 

C) 

D) 

E) 

15. Sea la función f definida por $f(x) = -\sqrt{x-2} - 3$, ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

I) El dominio de f es el intervalo $[2, \infty[$.
II) El recorrido de f es el intervalo $]-3, \infty[$.
III) El mínimo valor que alcanza f es -3.

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo II y III
E) I, II y III

16. Sea f una función, con dominio el conjunto de los números reales, definida por $f(x) = (x+2)^4 + 1$. Si m, n, p, q y r son funciones, todas con dominio el conjunto de los números reales, ¿con cuál de las siguientes traslaciones se obtiene la gráfica de f?

A) Trasladar la gráfica de $m(x) = x^4 + 1$, dos unidades horizontalmente hacia la derecha.
B) Trasladar la gráfica de $n(x) = (x+3)^4 + 1$, una unidad horizontalmente hacia la izquierda.
C) Trasladar la gráfica de $p(x) = x^4$, dos unidades horizontalmente hacia la derecha y una unidad verticalmente hacia arriba.
D) Trasladar la gráfica de $q(x) = (x+2)^4 + 4$, tres unidades verticalmente hacia arriba.
E) Trasladar la gráfica de $r(x) = (x+4)^4 + 5$, dos unidades horizontalmente hacia la derecha y cuatro unidades verticalmente hacia abajo.

17. Sean las funciones $f(x) = x^3$ y $g(x) = x^2$ definidas en los números reales, ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

I) Sus gráficas se intersectan en dos puntos.
II) Si $x < 1$, entonces $f \leq g$.
III) Si $p > 1$, entonces la preimagen de **p** según f es mayor que la preimagen según g.

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo II y III
E) I, II y III

18. Sean las funciones f y g definidas en los números reales, mediante $f(x) = \frac{3}{2}x - 1$ y $2g(x) - 3x + 5 = 0$, ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

I) Sus gráficas corresponden a rectas paralelas.
II) La gráfica de $f(x) - g(x)$ corresponde a una recta paralela al eje x.
III) $5f(x) - 2g(x)$ corresponde a una función lineal.

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo II y III
E) I, II y III

19. Una función lineal f es de la forma $f(x) = px$, con $p \neq 0$, definida en el conjunto de los números reales.
¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) **siempre** verdadera(s)?

I) La imagen de **p** es un número real positivo.
II) La imagen de una suma es igual a la suma de las imágenes.
III) La imagen de un producto es igual al producto de las imágenes.

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo II y III
E) I, II y III

20. Sean f una función definida en los reales mediante $f(x)=\sqrt{x-h}-k$, se puede determinar el valor numérico del mínimo de la función, sabiendo:

(1) El valor numérico de f(h).
(2) El recorrido de la función.

A) (1) por sí sola
B) (2) por sí sola
C) Ambas juntas, (1) y (2)
D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)
E) Se requiere información adicional

21. En una piscina hay 1.500 litros y el desagüe bota medio litro por minuto.
La función que describe la cantidad de litros (L) que habrá en la piscina a las "x" horas después de abrir el desagüe es:

A) $L(x) = 1500 - \frac{x}{120}$
B) $L(x) = 1500 - \frac{x}{2}$
C) $L(x) = 1500 - 30x$
D) $L(x) = 1500 - 120x$
E) $L(x) = (1500 - 30)x$

22. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s) con respecto a la función f definida por $f(x)=x^2-9$, para $x>3$?

I) Modela el área de un rectángulo de lados (x+3) cm y (x-3) cm.
II) Modela el área que resulta de restar el área de un cuadrado de lado 3 cm al área de un cuadrado de lado x cm.
III) Modela el área que resulta de restar el área de un cuadrado de lado $\sqrt{5}$ cm al área de un rectángulo de lados (x+2) y (x-2) cm.

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo II y III
E) I, II y III

23. Un pediatra indica que hay que administrarle a un niño 0,025 gramos de un medicamento por cada kilo que este tenga. Según esto, ¿cuál de las siguientes funciones modela la cantidad de gramos que habría que administrarle a un niño que pesa **m** gramos?

A) $m \cdot 0{,}025$

B) $\dfrac{m}{0{,}025}$

C) $1000 \cdot m \cdot 0{,}025$

D) $\dfrac{m}{1000} \cdot 0{,}025$

E) $\dfrac{0{,}025 \cdot 1000}{m}$

24. En una casa hay un desperfecto en el baño, para su reparación se piden presupuestos a los maestros Juan y Pedro. Juan cobra una UF por la visita más 0,2 UF por hora de trabajo, mientras que Pedro cobra 0,3 UF por hora trabajada. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?

A) Si el trabajo es inferior a 3 horas, Pedro es más económico.

B) Si el trabajo duró 12 horas, Juan es el más económico.

C) Si el trabajo dura 10 horas, ambos cobran lo mismo.

D) Si el maestro contratado fue Juan y cobró 2 UF, entonces trabajó 5 horas.

E) Para trabajos inferiores a 10 horas, Juan es el más económico.

25. Para el envío de un paquete, la empresa "Tunquén" cobra un cargo fijo de $1.500 más $300 por kilómetro recorrido, mientras que la empresa "TransCargo" cobra $400 por cada kilómetro recorrido. ¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) **siempre** verdadera(s)?

I) Si el envío es inferior a 15 kilómetros es más económico Transcargo.

II) Para 15 kilómetros, ambas empresas cobran lo mismo.

III) Si el envío es superior a 15 kilómetros es más económico Tunquén.

A) Solo I

B) Solo II

C) Solo I y II

D) Solo II y III

E) I, II y III

26. La población p(t) de peces en una piscina de cultivo se ha modelado según la función: $p(t) = 50 \cdot \left(\dfrac{3}{2}\right)^t$, donde t es la cantidad de meses transcurridos. ¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

I) Al inicio habían 75 peces.

II) A los dos meses habían menos de 120 peces.

III) A los tres meses su población inicial se habrá más que triplicado.

A) Solo I

B) Solo II

C) Solo I y II

D) Solo II y III

E) I, II y III

27. La temperatura T medida en grados Celcius (°C) de una habitación se modela a través de la función T(t) donde t es la cantidad de horas transcurridas desde el momento que se inició la medición.
Si $T(t) = 18 + 2t$, con $0 \leq t < 6$ y $T(t) = 54 - 4t$, con $6 \leq t \leq 10$, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

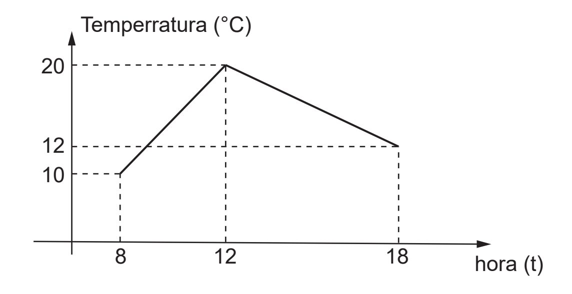
I) La temperatura subió 2 °C por hora durante las seis primeras horas y después bajó 4 °C por hora durante las siguientes 4 horas.
II) El máximo de la temperatura alcanzada durante la medición fue 30° C.
III) El mínimo de la temperatura alcanzada durante la medición fue 18° C.

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo II y III
E) I, II y III

28. Una persona deposita $\$$**p** en un banco que ofrece un interés mensual de 0,5%.
Si el capital se reajusta todos los meses, ¿cuál de las siguientes funciones determina el capital reajustado C(t) después de **t** meses?

A) $C(t) = 1{,}005 \cdot p \cdot t$
B) $C(t) = (1{,}05)^t \cdot p$
C) $C(t) = (1{,}005)^t \cdot p$
D) $C(t) = p(1 + 0{,}005t)$
E) $C(t) = (0{,}005)^t \cdot p$

29. En el siguiente gráfico se ilustra la temperatura T(t) de una habitación entre las 8 y las 18 horas. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?



A) La función que modela la temperatura entre las 8 y 12 horas es $T(t) = 2{,}5t - 10$.
B) A las 10 la temperatura de la habitación era de 15° C.
C) La función que modela la temperatura entre las 12 y 18 horas es $T(t) = -\frac{4}{3}t + 36$.
D) Entre las 8 y las 12 horas la temperatura sube 2,5° C por hora.
E) A las 15 horas la temperatura era superior a los 16° C.

30. En una empresa, el costo de producir una cierta cantidad de artículos, comprende un costo fijo más un costo por cada artículo. Si se sabe que el costo de producir 20 artículos es $\$512.000$ y el costo de producir 40 artículos es $\$524.000$, ¿cuál de las siguientes funciones, modela el costo C(x) de producir **x** artículos?

A) $C(x) = 600x$
B) $C(x) = 500000x$
C) $C(x) = 500000+600x$
D) $C(x) = 500600x$
E) $C(x) = 600+500000x$

31. El nivel del agua en un estanque cilíndrico es de h metros y baja en forma continua **q** metros por hora, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?

A) La función que modela la altura H del agua en el estanque (en m) a las x horas es $H(x) = h-qx$.

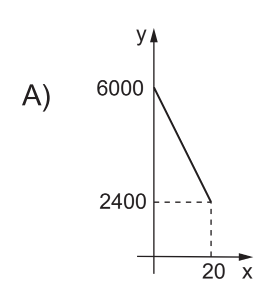
B) La cantidad de horas que hay que esperar para que la altura baje a la mitad es $\frac{h}{2q}$.

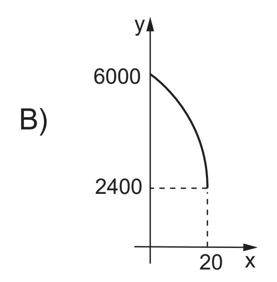
C) Después de $\frac{h}{q}$ horas no habrá agua en el estanque.

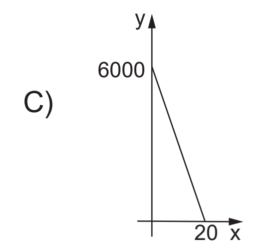
D) A los 45 minutos la altura del agua será $\frac{4h-3q}{4}$.

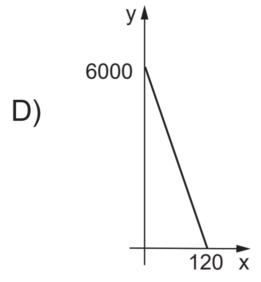
E) Para que la altura original del agua se reduzca en un 10% hay que esperar $\frac{9h}{10q}$ horas.

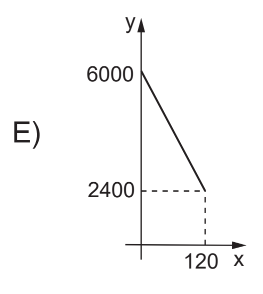
32. A una función teatral asisten 120 personas donde todas ellas cancelaron su entrada. Si los adultos pagaron 50 US$ y los estudiantes 20 US$, ¿cuál de los siguientes gráficos representa mejor la recaudación obtenida, si x es la cantidad de estudiantes que asistieron?

A) 

B) 

C) 

D) 

E) 

33. Si f es una función definida en los reales tal que $f\left(\frac{x+1}{2}\right) = x - 1$, entonces f(x+1) =

A) $x + 1$
B) $2x - 2$
C) $2x + 1$
D) $2x$
E) $2x - 1$

34. Sea f una función definida en los reales mediante $f\left(\frac{x-5}{1-x}\right) = x+1$, entonces f(3) =

A) -3
B) -2
C) 3
D) 2
E) 1

35. Sea f una función definida en los reales, mediante $f(x + 2) = 2f(x) + 3$, Si $f(8) = 61$, entonces f(4) =

A) 3
B) 5
C) 6,5
D) 13
E) 30,5

36. Sean las funciones f y g, ambas con dominio en los números reales, definidas por $f(x)=ax^2$ y $g(x)=ax^3$, con **a** un número real distinto de cero, ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

I) Si $a>0$ y $0<x<1$, entonces $f(x) > g(x)$.
II) Si $a<0$ y $x<0$, entonces $f(x) < g(x)$.
III) Las gráficas de f y g se intersectan en dos puntos.

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo II y III
E) I, II y III

37. Sean las funciones f y g con dominio en los números reales, definidas por $f(x) = x^4$ y $g(x) = x^2$, ¿cuál(es) de los siguientes conjuntos cumple(n) con que todos sus elementos satisfacen la desigualdad $f(x) < g(x)$?

I) $[-1 , 0[$
II) $]0 , 1]$
III) $]-1 , 1[$

A) Solo I
B) Solo III
C) Solo I y II
D) Solo II y III
E) Ninguno de ellos.

RESPUESTAS CAPÍTULO 7									
1. C	**2.** A	**3.** B	**4.** E	**5.** C	**6.** E	**7.** C	**8.** D	**9.** D	**10.** E
11. B	**12.** D	**13.** C	**14.** E	**15.** A	**16.** E	**17.** C	**18.** E	**19.** C	**20.** D
21. C	**22.** E	**23.** D	**24.** E	**25.** E	**26.** D	**27.** C	**28.** C	**29.** E	**30.** C
31. E	**32.** E	**33.** D	**34.** C	**35.** D	**36.** E	**37.** E			

Capítulo 4

TIPOS DE FUNCIONES Y FUNCIÓN INVERSA

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) matemático, jurista, bibliotecario y político alemán.
El término "función" se le atribuye a él, este lo utilizó para designar a cantidades cuyas variaciones están regidas por alguna ley, concepto que no coincide con la definición actual.
Leibniz y Newton, alguno de los matemáticos más importantes de todos los tiempos, contribuyeron enormemente al desarrollo del concepto de función.



CONCEPTOS CLAVES

- Función inyectiva o uno a uno
- Función epiyectiva o sobreyectiva
- Función biyectiva
- Función inversa
- Gráfico de función inversa

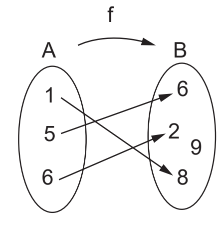
TIPOS DE FUNCIONES

Veremos ahora algunos tipos especiales de funciones, estas son las inyectivas, epiyectivas y las biyectivas.

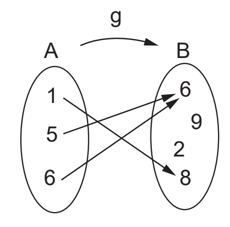
- **Funciones inyectivas**

  Las funciones inyectivas se caracterizan porque a imágenes distintas le corresponden preimágenes distintas, es decir no puede ocurrir que dos elementos del conjunto de partida tengan una misma imagen.

  En el siguiente diagrama sagital, podemos observar que la función f es inyectiva mientras que la g no, debido a que el 5 y el 6 tienen la misma imagen.

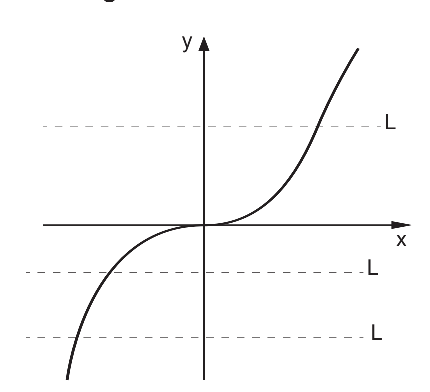


La función f es inyectiva, ya que a preimágenes distintas le corresponden imágenes distintas.

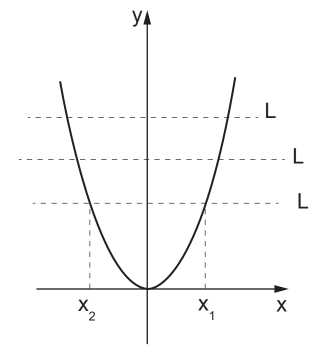


La función g NO es inyectiva, ya que a preimágenes distintas NO le corresponden imagenes distintas.

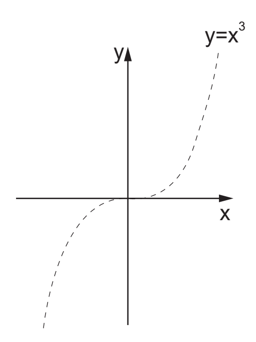
En un gráfico cartesiano, las funciones inyectivas se pueden reconocer por lo siguiente:



Una función es inyectiva si al trazar líneas paralelas al eje x, cada una de ellas corta al gráfico en un solo punto.
En la figura, cada recta L corta a la gráfica en un solo punto, por lo tanto la gráfica corresponde a una función inyectiva.

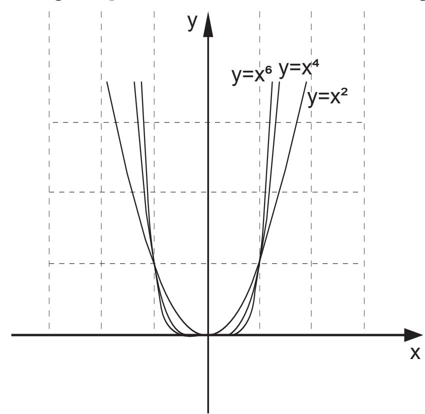


Esta función no es inyectiva, algunas líneas horizontales están cortando al gráfico en más de un punto. Esto se traduce en que x_1 y x_2 tienen la misma imagen.



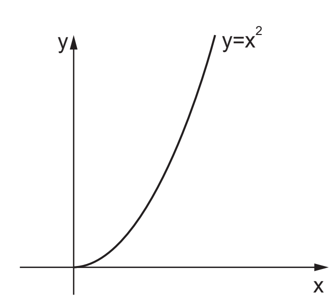
Las funciones potencia de exponente impar, es decir funciones del tipo $f(x)=x^n$, con n impar positivo son inyectivas.

Ejemplo de funciones no inyectivas:



Las funciones potencia de exponente par, es decir funciones del tipo $f(x)=x^n$, con n par positivo no son inyectivas.

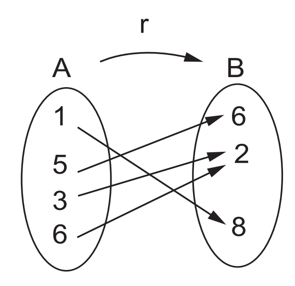
Cuando una función no es inyectiva podemos restringir su dominio para que lo sea, por ejemplo la función $f(x)=x^2$ definida en los reales no es inyectiva, pero si restringimos la función para $x\geq 0$, resulta ser inyectiva:

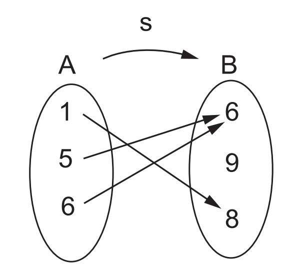


Observa que la función $f(x)=x^2$, definida para $x\geq 0$, resulta ser inyectiva, es decir restringiendo el dominio de una función podemos lograr que sea inyectiva.

- **Funciones epiyectivas**

Las funciones epiyectivas se caracterizan porque todo elemento del conjunto de llegada tiene alguna preimagen.



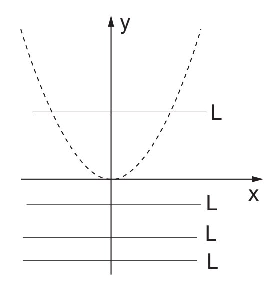


La función r es epiyectiva ya que todos los elementos del conjunto de llegada tienen preimagen.

La función s NO es epiyectiva ya que NO todos los elementos del conjunto de llegada tienen preimagen.

En un plano cartesiano, una función epiyectiva se caracteriza porque si trazamos una línea paralela al eje x por todo elemento del conjunto de llegada, esta debe cortar al gráfico en por lo menos un punto.

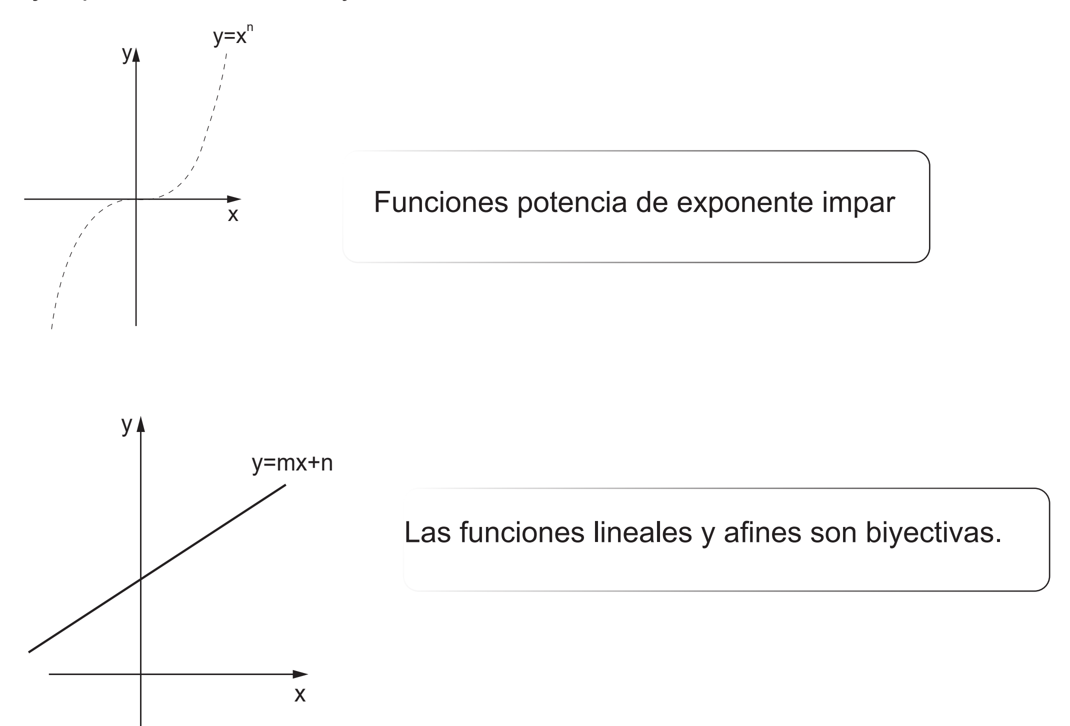
Por ejemplo, la función $f(x) = x^4$ definida de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ no es inyectiva, ya que los números negativos no tienen preimagen.



Al igual que en el caso de las funciones inyectivas, podemos restringir, en este caso el conjunto de llegada, para que las funciones se transformen en epiyectivas.
Por ejemplo, la función anterior, $f(x)=x^4$, si la definimos de $\mathbb{R} \rightarrow [0 , \infty[$ resulta ser epiyectiva.

- **Funciones biyectivas**

Son aquellas funciones que son inyectivas y epiyectivas a la vez.
Ejemplos de funciones biyectivas:



Por lo ya visto anteriormente una función se puede restringir en su dominio y en su conjunto de llegada para que sea biyectiva.

Una de las propiedades importantes de las funciones biyectivas es que su inversa es también función.

FUNCIÓN INVERSA

Sea una función f definida del conjunto A al conjunto B, de modo que la imagen de x es y, entonces la función inversa hace el proceso contrario, es decir la imagen de y es x.
Como mencionamos anteriormente, se requiere que la función f sea biyectiva, para que la inversa sea también función.

- **Determinación algebraica de la función inversa**

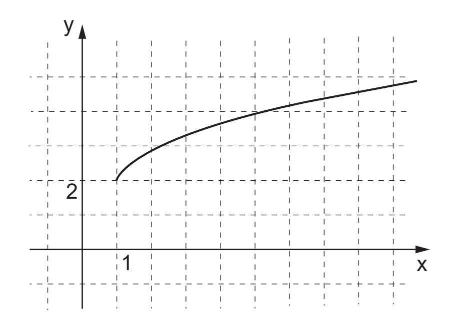
Veamos esto con un ejemplo:
Supongamos que tenemos la función f definida para los reales mediante $f(x)=\sqrt{x-1} + 2$ con f definida de $[1 , \infty[\rightarrow [2 , \infty[$.

De la ecuación $y=\sqrt{x-1}+2$, despejamos la variable x, para ello transponemos el 2 y elevamos a ambos lados de la ecuación:

$y-2=\sqrt{x-1}$ $\quad /(\ )^2$
$x=(y-2)^2+1$

Ahora cambiamos y por x y viceversa:
$y=(x-2)^2+1$, con lo que obtenemos la inversa de la función dada.

Tal como se observa en la siguiente gráfica la función debió ser definida de $[1, \infty[\rightarrow [2, \infty[$, para que sea biyectiva y de esta forma la inversa también es función.



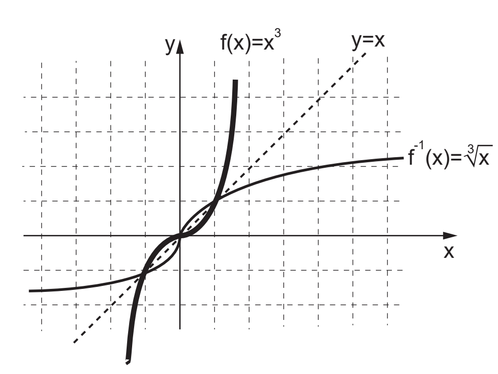
Si f hubiese sido definida de $[1, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$, la inversa tendría el inconveniente que los menores que 2 no tendrían imagen debido a que no es epiyectiva.

Como ya lo mencionamos, siempre se puede restringir el conjunto de llegada al recorrido de la función, de esta forma se convierte la convertimos en una función epiyectiva.

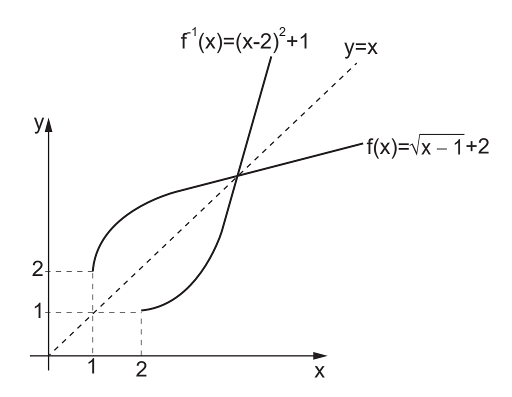
- **Gráfica de la función inversa**

El gráfico de una función y la de su inversa son simétricos con respecto a la recta de ecuación y=x.

Por ejemplo, en la gráfica siguiente se observan las funciones $f(x)=x^3$ y su inversa $f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x}$.



Observa como la función del ejercicio anterior: $f(x)=\sqrt{x-1}+2$ y su inversa $f^{-1}(x)=(x-2)^2+1$ tienen sus gráficas simétricas respecto a la recta de ecuación y=x.

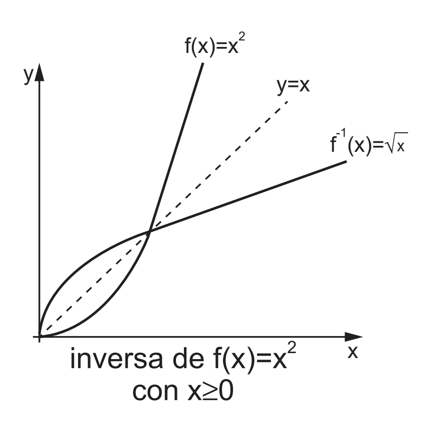


Como veremos a continuación, cuando calculamos la inversa de una función a la cual hemos restringido el dominio para convertirla en inyectiva, pueden surgir algunas dificultades, las que explicaremos a continuación con el desarrollo del siguiente ejemplo.

Ejemplo:

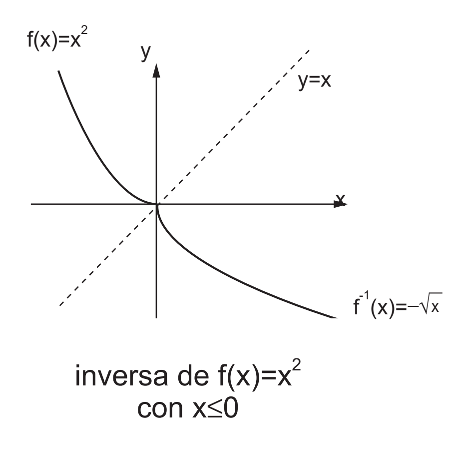
Caso 1

Sea la función $f(x)=x^2$, con $x\geq 0$, entonces tenemos que $y=x^2$, al queremos despejar la "x", tenemos dos posibilidades: $x=\pm\sqrt{y}$, pero como $x\geq 0$, desechamos el valor negativo, se tiene entonces que $x=\sqrt{y}$, ahora intercambiamos x por y y viceversa y obtenemos la inversa $f^{-1}(x)=\sqrt{x}$
Geométricamente, tendríamos lo siguiente:



Caso 2

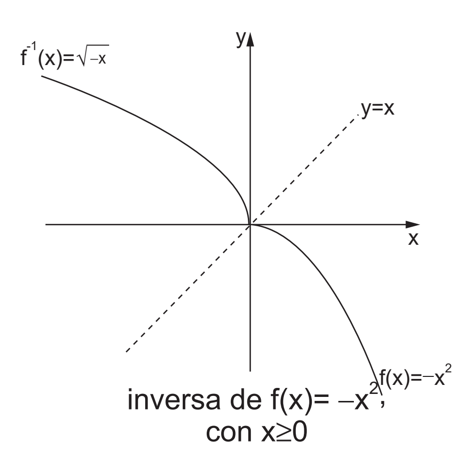
Sea la función $f(x)=x^2$, con $x\leq 0$, entonces tenemos que $y=x^2$, al queremos despejar la "x", tenemos dos posibilidades: $x=\pm\sqrt{y}$, pero como $x\leq 0$, desechamos el valor positivo, se tiene entonces que $x=-\sqrt{y}$, ahora intercambiamos x por y y viceversa y obtenemos la inversa $f^{-1}(x)=-\sqrt{x}$
Geométricamente, tendríamos lo siguiente:



inversa de $f(x)=x^2$
con $x\leq 0$

Caso 3

Sea la función $f(x)=-x^2$, con $x\geq 0$, entonces tenemos que $y=-x^2$, al queremos despejar la "x", tenemos dos posibilidades: $x=\pm\sqrt{-y}$, pero como $x\geq 0$, desechamos el valor negativo, se tiene entonces que $x=\sqrt{-y}$, ahora intercambiamos x por y y viceversa y obtenemos la inversa $f^{-1}(x)=\sqrt{-x}$
Geométricamente, tendríamos lo siguiente:

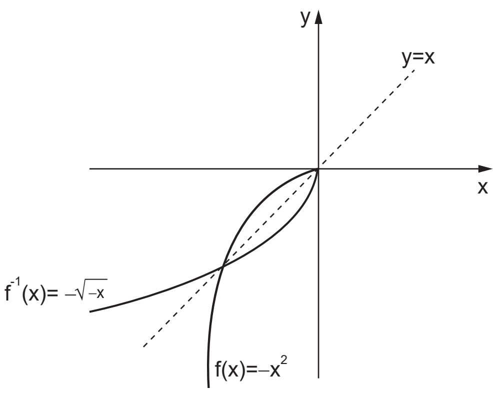


inversa de $f(x)=-x^2$,
con $x\geq 0$

Caso 4

Sea la función $f(x)=-x^2$, con $x\leq 0$, entonces tenemos que $y=-x^2$, al queremos despejar la "x", tenemos dos posibilidades: $x = \pm\sqrt{-y}$, pero como $x\leq 0$, desechamos el valor positivo, se tiene entonces que $x = -\sqrt{-y}$, ahora intercambiamos x por y y viceversa y obtenemos la inversa $f^{-1}(x) = -\sqrt{-x}$

Geométricamente, tendríamos lo siguiente:



inversa de $f(x)= -x^2$, con $x\leq 0$

EJERCICIOS RESUELTOS

1. Sea $f: A \rightarrow B$, ¿cuál de las siguientes funciones **NO** es inyectiva?

A) $(x-2)^2+1$, con $A=[3 , \infty[$

B) x^4+1, con $A=]-\infty , -1]$

C) $(x+3)^4-2$, con $A=]-\infty , -4]$

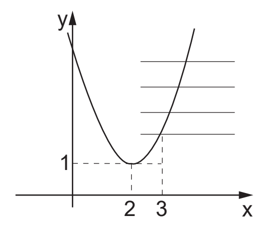
D) $3x+1$, con $A=]-\infty , -2]$

E) $-(x-4)^6+3$, con $A=[3 , \infty[$

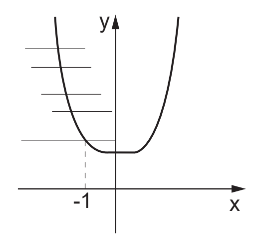
Solución:

Para resolver este ejercicio, ocuparemos las gráficas de las respectivas funciones.

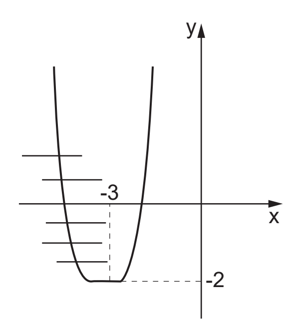
A) La gráfica de $f(x)=(x-2)^2+1$, se muestra a continuación, observa que para $x\geq 3$, las rectas paralelas al eje x la cortan en un solo punto, luego es inyectiva.



B) Al igual que en el caso anterior, al trazar paralelas al eje x, estas cortan al gráfico en un solo punto, luego es inyectiva.

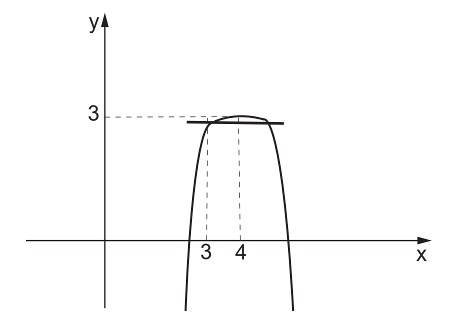


C) Para $x \leq -4$, las rectas paralelas al eje x cortan a la grafica en un solo punto, luego es inyectiva.



D) Por ser la función $f(x)=3x+1$ una función afín su gráfico es una recta, luego es inyectiva.

E) Observa en la gráfica que para valores de $x \geq 3$, las rectas paralelas la cortan en más de un punto, luego no es inyectiva para este dominio.

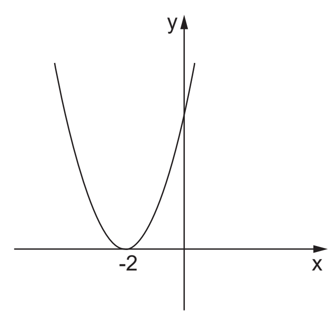


2. Sea f: $]-\infty , -2] \rightarrow B$ una función definida mediante $f(x) = (x+2)^2$, ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

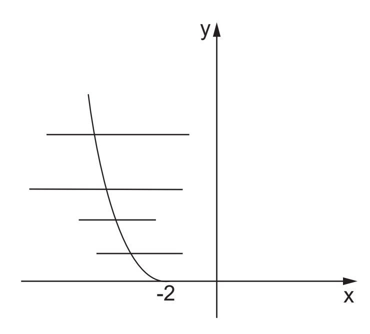
I) f no es inyectiva.
II) Si B es $[0 , \infty[$ entonces f es epiyectiva.
III) Si f es biyectiva, entonces su inversa es $f^{-1}(x) = -\sqrt{x} - 2$, con x en B.

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo II y III
E) I, II y III

Solución:
Sabemos que el gráfico de $f(x)=(x+2)^2$, corresponde a la gráfica de $g(x)=x^2$, desplazado 2 unidades hacia la izquierda:



Como el conjunto de partida es el intervalo es el intervalo $]-\infty , 2]$, la gráfica corresponde a la rama izquierda de la parábola y en este sector la función es inyectiva, ya que al trazar líneas paralelas al eje x, cada una de ellas intersecta al gráfico en un solo punto.

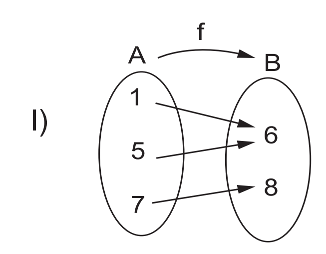


Por lo tanto I es falsa.
En el gráfico, observa que el recorrido corresponde al intervalo $[0 , \infty[$, como en II se definió el conjunto de llegada justamente como este intervalo, tenemos que la función es epiyectiva, luego II es verdadera.
En III, tenemos que la función es biyectiva por lo tanto su inversa también es función.
Para determinar la inversa de $y = (x+2)^2$, aplicamos raíz cuadrada a ambos lados:
$x = \pm\sqrt{y} -2$, pero sabemos que $x \leq -2$, por lo tanto $x = -\sqrt{y} -2$, ahora cambiamos x por y, y viceversa: $y = -\sqrt{x} -2$, de modo que III también es verdadera.
Respuesta, D) Solo II y III.

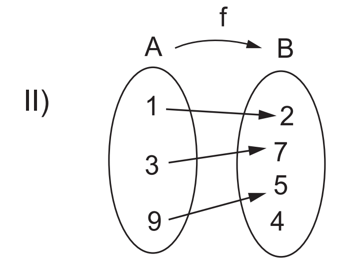
EJERCICIOS DE PRÁCTICA

1. ¿Cuál(es) de las siguientes funciones es (son) inyectivas?

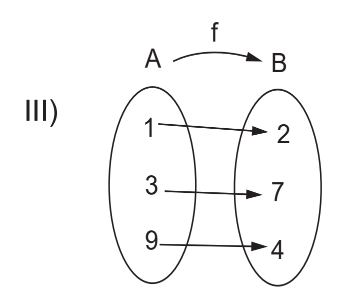
I)



II)



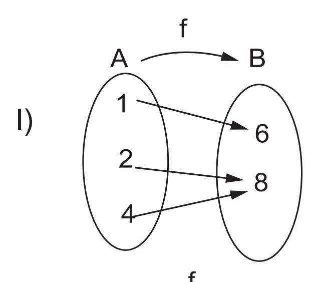
III)



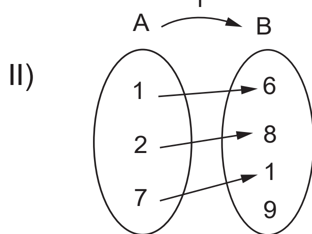
A) Solo I
B) Solo II
C) Solo III
D) Solo I y III
E) Solo II y III

2. ¿Cuál(es) de las siguientes funciones es (son) epiyectiva(s)?

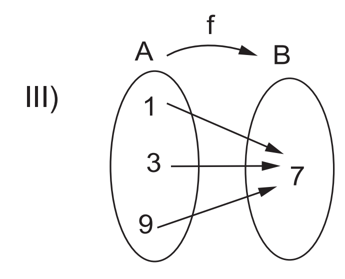
I)



II)

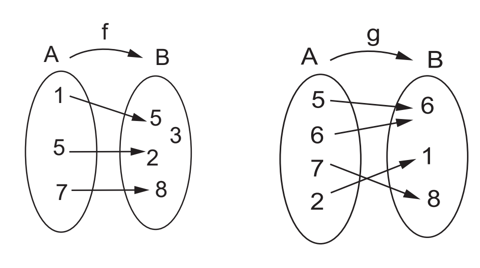


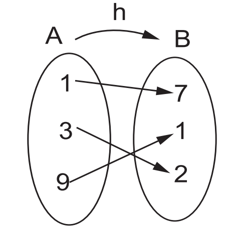
III)



A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y III
D) Solo II y III
E) Ninguna de ellas.

3. ¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s) con respecto a las funciones f, g y h que se presentan a continuación?





I) f y h son inyectivas.

II) g y h son epiyectivas.

III) h^{-1} es función.

A) Solo I

B) Solo III

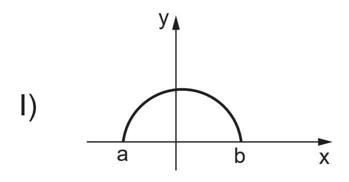
C) Solo I y II

D) Solo II y III

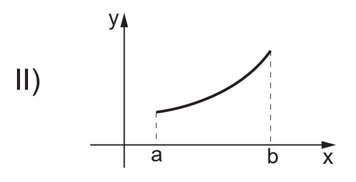
E) I, II y III

4. Los siguientes gráficos corresponden a funciones definidas de $[a,b] \rightarrow B$, ¿cuál(es) de ellos corresponden a funciones inyectivas?

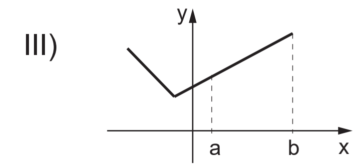
I)



II)



III)



A) Solo II

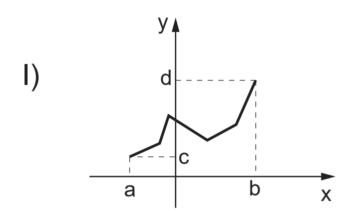
B) Solo III

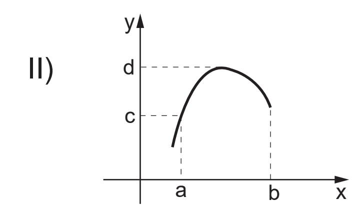
C) Solo I y III

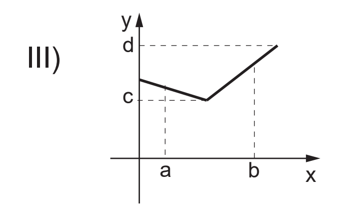
D) Solo II y III

E) Ninguna de ellas.

5. Los siguientes gráficos corresponden a funciones definidas de [a,b] $\rightarrow$ [c,d], ¿cuál(es) de ellos corresponden a funciones epiyectivas?

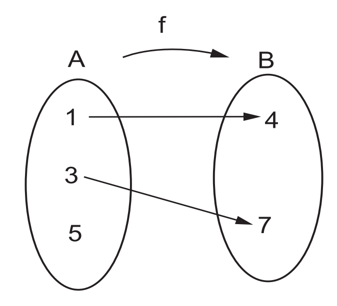
I) 

II) 

III) 

A) Solo II
B) Solo III
C) Solo I y II
D) I, II y III
E) Ninguna de ellas

6. Sea f: A $\rightarrow$ B, una función epiyectiva cuyo diagrama sagital es el siguiente:

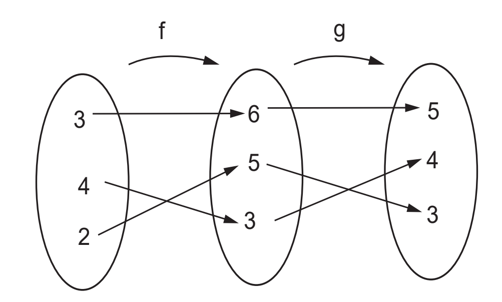


Si f(5) = a, ¿cuál de las siguientes condiciones se debe cumplir para que f sea inyectiva?

(1) $a \neq 4$
(2) $a \neq 7$

A) (1) por sí sola
B) (2) por sí sola
C) Ambas juntas, (1) y (2)
D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)
E) Se requiere información adicional

7. Si en la figura adjunta se muestran las funciones f y g, entonces $(f \circ g^{-1})(4)$=



A) 3
B) 4
C) 5
D) 6
E) Falta información para determinarlo.

8. Sea f una función definida en los reales mediante f(x)=2x–1, entonces $f(3) + f^{-1}(3)=$

A) 0

B) 3

C) 7

D) 8

E) $\frac{26}{5}$

9. Sea f: [2 , ∞[→ B definida mediante $f(x)=2\sqrt{x-2}-3$, si f es biyectiva, entonces la inversa de f es:

A) $\left(\frac{x+3}{2}\right)^2 - 2$, con x en B.

B) $\left(\frac{x+3}{2}\right)^2 + 2$, con x en B.

C) $\left(\frac{x-3}{2}\right)^2 - 2$, con x en B.

D) $\left(\frac{x+2}{3}\right)^2 + 3$, con x en B.

E) $2\cdot\left(\frac{x+3}{2}\right)^2$, con x en B.

10. Sean f y g funciones definidas en los reales mediante $f(x) = \frac{2x+1}{3}$ y g(x) = 3x–1, ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

I) $f^{-1}(x) = \frac{3x-1}{2}$

II) $g^{-1}(x) = \frac{x+1}{3}$

III) $(f \circ g)^{-1}(x) = \frac{3x+1}{6}$

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) I, II y III
E) Ninguna de ellas.

11. Sean f y g funciones definidas en los reales mediante f(x) = 2x+1 y $g(x) = \frac{x+1}{2}$, ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

I) $(f^{-1} \circ g)(x) = \frac{x-1}{4}$

II) $(g \circ f^{-1})(x) = \frac{x+1}{4}$

III) $(f^{-1} \circ g^{-1})(x) = x-1$

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo I y III
E) I, II y III

12. Sea f: [4 , 12] $\rightarrow$ B definida por $f(x) = \sqrt{x - 3} + 2$, ¿cuál de los siguientes conjuntos debe ser el que corresponda a B para que f sea epiyectiva?

A) [2 , 5]

B) [3 , 5]

C) [3 , ∞[

D) [2 , ∞[

E) $\mathbb{R}^+$

13. Sean las siguientes funciones definidas de A $\rightarrow$ B, ¿cuál de ellas **NO** es inyectiva?

A) $(x - 2)^2 + 3$, con A = [3,∞[

B) $(x + 1)^2 + 2$, con A =]–∞,–2]

C) $-\left(x + \frac{3}{2}\right)^4 - 2$, con A =]–∞,–2]

D) $(x - 4)^4 - 10$, con A = [3,∞[

E) $\sqrt[3]{x - 3} + 6$, con A = [–3,∞[

14. Sean las siguientes funciones, ¿cuál de ellas es inyectiva?

A) $\sqrt{1 - x^2}$, con $-1 < x < 1$

B) $\frac{x^4 + 1}{x^2}$, con $x \neq 0$

C) $\frac{1 + x^2}{1 - x^4}$, con $x^2 \neq 1$

D) $3^{x^2} - 1$, con $x > 0$

E) Ninguna de ellas.

15. Las siguientes funciones están definidas de A $\rightarrow$ [0 , ∞[, ¿cuál de ellas **NO** es epiyectiva?

A) $(x - 8)^2$, con A = $\mathbb{R}$

B) $\sqrt{x + 4}$, con A = [–4 , ∞[

C) 5^x, con A = $\mathbb{R}$

D) $\sqrt{(x + 3)^2}$, con A = $\mathbb{R}$

E) $(3x-1)^4$, con A = $\mathbb{R}$

16. Las siguientes funciones están definidas de A $\rightarrow$ B , ¿cuál de ellas **NO** es inyectiva?

A) $f(x) = -(x-1)^2 + 4$, con A = [–3 ,1].

B) $f(x) = 2(x+1)^4 - 3$, con A = [0 , ∞[.

C) $f(x) = \left(\frac{3x - 1}{2}\right)^2 + 1$, con A = [0,2[.

D) $f(x) = -(1-2x)^4 + 1$, con A = $\left]-\infty , \frac{1}{4}\right]$

E) $f(x) = 2(x-1)^5 - 3$, con A = [0,2].

17. Sea f: [p,q] $\rightarrow$ B, definida por $f(x)=x^2$, se puede determinar que f es inyectiva, sabiendo que:

(1) $pq > 0$

(2) $B = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$

A) (1) por sí sola

B) (2) por sí sola

C) Ambas juntas, (1) y (2)

D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)

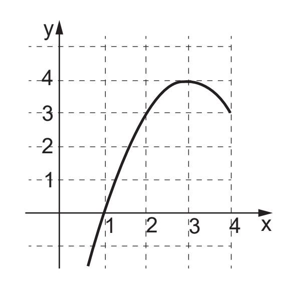
E) Se requiere información adicional

18. Sea f: $\mathbb{R} \rightarrow [0, \infty[$ definida mediante $f(x) = \sqrt{(x-1)^2}$, ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s) con respecto a esta función?

I) Es inyectiva.
II) Es epiyectiva.
III) La inversa es función.

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) I, II y III
E) Ninguna de ellas.

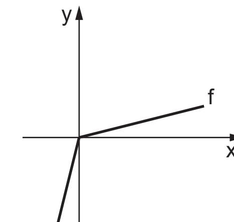
19. El gráfico de la figura corresponde al de la función f: A $\rightarrow$ B, definida mediante $f(x) = -(x-3)^2+4$, ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?



I) Si A=[1,4] y B=[0,4], entonces f es inyectiva.
II) Si A=[1,4] y B=[0,4], entonces f es epiyectiva.
III) Si A=[2,3] y B=[3,4], entonces f es biyectiva.

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo II y III
E) I, II y III

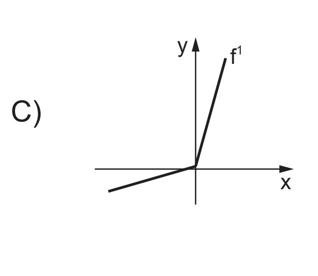
20. El siguiente gráfico corresponde al de la función f:

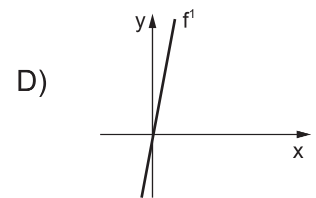


¿Cuál de los siguientes gráficos corresponde al de la función f^{-1}?

A) y, f^{-1}, x

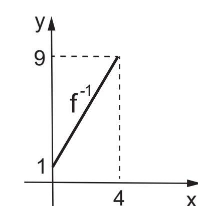
B) y, f^{-1}, x

C)


D)


E) y, f^{-1}, x

21. Si el gráfico de la figura corresponde al de f^{-1}, ¿cuál de las siguientes gráficas corresponde al de f?



A)

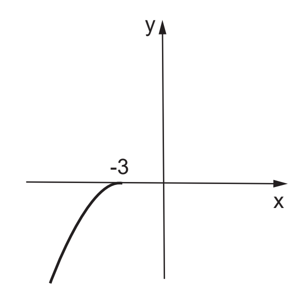
B)

C)

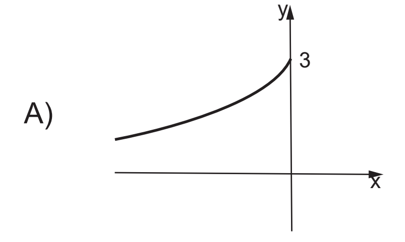
D)

E)

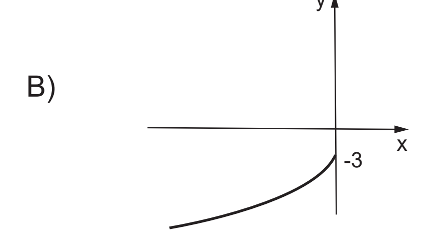
22. El gráfico de la figura corresponde al de la función biyectiva f. ¿Cuál de los siguientes gráficos corresponde al de $f^{-1}(x)$?



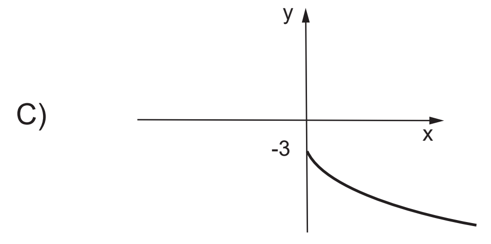
A)



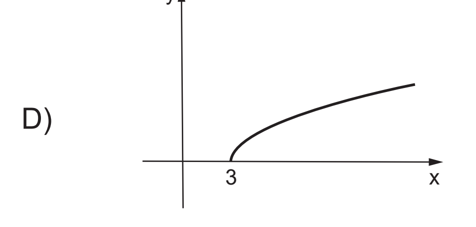
B)



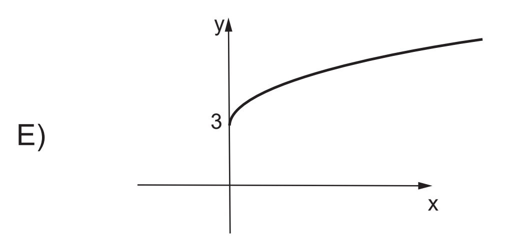
C)



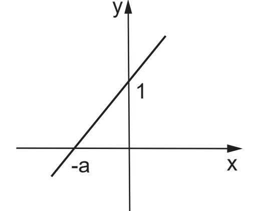
D)

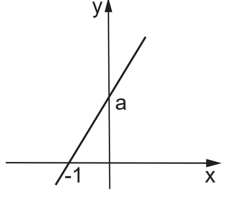


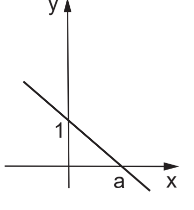
E)

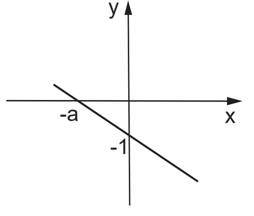


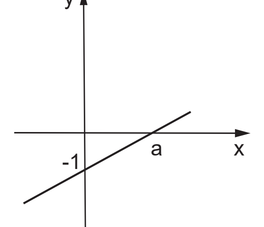
23. Sea la función f definida en los números reales mediante f(x)=ax+a con a un número real positivo. ¿Cuál de los siguientes gráficos corresponde al gráfico de la inversa de f?

A) 

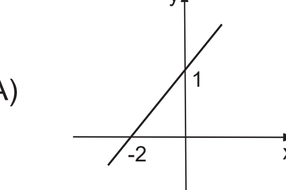
B) 

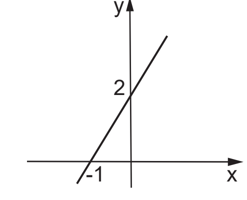
C) 

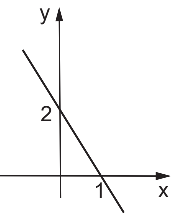
D) 

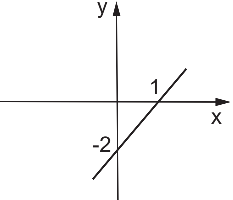
E) 

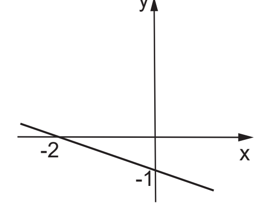
24. Sea la función f definida en los reales mediante $f(x) = \frac{x-2}{2}$, ¿cuál de los siguientes gráficos representa mejor al de su inversa?

A) 

B) 

C) 

D) 

E) 

25. Sea la función f definida en los reales mediante $f(x) = px+q$ con $p\neq 0$, $p\neq -1$ y $p\neq 1$. ¿Para qué valor de x se tiene que $f(x) = f^{-1}(x)$?

A) $\dfrac{q}{p-1}$

B) $\dfrac{q}{1-p}$

C) $\dfrac{-q}{p+1}$

D) $\dfrac{q}{p+1}$

E) No existe tal valor.

26. Sea $f: \left]\dfrac{b}{a}, \infty\right[\rightarrow B$ una función definida por $f(x) = \sqrt{ax-b}$, con $a>0$, ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es(son) verdadera(s)?

I) Si $B = \mathbb{R}^{+}$ entonces f es epiyectiva.

II) f es inyectiva independiente de B.

III) Si f es biyectiva, su inversa es $f^{-1}(x) = \dfrac{x^2+b}{a}$

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo I y III
E) I, II y III

27. Sea la función $f(x) = mx+n$ definida en los reales, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?

A) Si $m\neq 0$, entonces f es inyectiva.

B) Si $m=0$, entonces f no es inyectiva.

C) Si $m\neq 0$, entonces f es biyectiva.

D) Si $m\neq 0$ y $n=0$, entonces $f^{-1}(x)=\dfrac{1}{m}x$.

E) Si $m\neq 0$ y $n\neq 0$, entonces la inversa podría ser una función lineal.

28. Sea $f: A \rightarrow B$, definida por $f(x) = -(x+2)^4+4$. ¿Si los siguientes conjuntos corresponden al conjunto A, para cuál de ellos la función **NO** es inyectiva?

A) $]-2, 5]$

B) $]-5, -2]$

C) $]-\infty, -1]$

D) $\left]-6, -\dfrac{5}{2}\right]$

E) Para ninguno de ellos.

29. Sea la función f: A $\to$ B, definida por $f(x) = (x-2)^2$, ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

I) Si A = $]-\infty, 0]$, entonces f es inyectiva.

II) Si A = $\mathbb{R}$ y B = $[0, \infty[$, entonces f es sobreyectiva.

III) Si A = $]-\infty, 2]$ y B = $[0, \infty[$ entonces su inversa es $f^{-1}(x) = 2-\sqrt{x}$ con x en B.

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo I y III
E) I, II y III

30. Sea g: $[1, 3] \to [1, 5]$, definida por $g(x)=(x-3)^2+1$, ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

I) g es inyectiva.

II) g es epiyectiva.

III) Si g es biyectiva, entonces $g^{-1}(x) = 3 + \sqrt{x-1}$, con x perteneciente a [1 , 5].

A) Solo I
B) Solo III
C) Solo I y II
D) Solo I y III
E) I, II y III

31. Sea f una función afín. En la siguiente tabla se muestran algunos valores de x y sus correspondientes imágenes (y):

x	y
3	2
5	-2

¿Cuál de las siguientes funciones corresponde a la inversa de f?

A) $-2x+8$

B) $\frac{x+8}{2}$

C) $\frac{8-x}{2}$

D) $\frac{x-8}{2}$

E) $\frac{x+16}{8}$

32. Si f^{-1} la inversa de f, cumple con que $f^{-1}(x-2) = 2x+3$, entonces f(x) =

A) $\frac{x-4}{2}$

B) $\frac{x+5}{2}$

C) $2x + 7$

D) $\frac{x-5}{2}$

E) $\frac{x-7}{2}$

33. Sean f y g dos funciones tales que $f(x + 2) = 3x - 1$ y $g^{-1}(x-2) = 2x + 3$, entonces $(fog)(5) =$

A) –10
B) –7
C) –5
D) –3
E) 5

34. Sea $f(x) = -\sqrt{x}$, definida para $x \geq 0$. Si f es biyectiva, entonces $f^{-1}(x) =$

A) x^2, si x es un real.
B) x^2, si $x \geq 0$.
C) $-x^2$, si $x > 0$
D) x^2 si $x \leq 0$
E) $-x^2$ si $x \leq 0$

35. Sean f y g dos funciones definidas de los reales, mediante $f(x) = mx + n$ y $g(x) = nx + m$. Se puede determinar que g es la inversa de f sabiendo que:

(1) $m = -1$
(2) $n = -1$

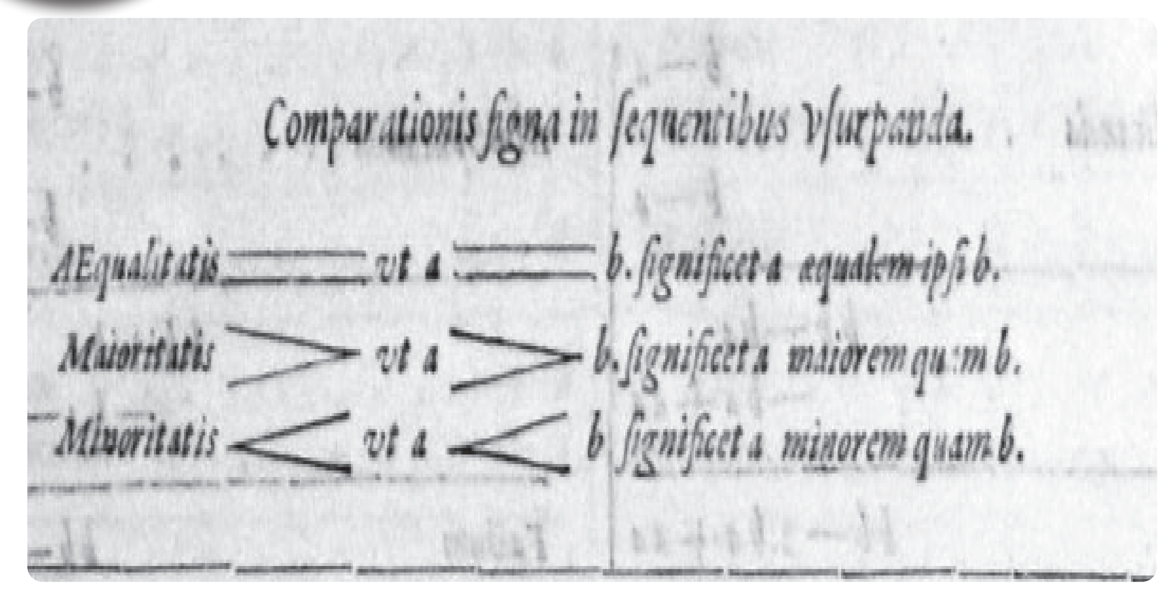
A) (1) por sí sola
B) (2) por sí sola
C) Ambas juntas, (1) y (2)
D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)
E) Se requiere información adicional

RESPUESTAS CAPÍTULO 8									
1. E	**2.** C	**3.** E	**4.** D	**5.** C	**6.** C	**7.** D	**8.** C	**9.** B	**10.** D
11. E	**12.** B	**13.** D	**14.** D	**15.** C	**16.** C	**17.** A	**18.** B	**19.** D	**20.** C
21. B	**22.** B	**23.** E	**24.** B	**25.** B	**26. E**	**27.** E	**28.** C	**29.** E	**30.** C
31. C	**32.** E	**33.** A	**34.** D	**35.** C					

Capítulo

5

DESIGUALDADES E INECUACIONES


Comparationis ſigna in ſequentibus vſurpanda.

Æqualitatis ═ vt a ═ b. ſignificet a æqualem ipſi b.

Maioritatis > vt a > b. ſignificet a maiorem quam b.

Minoritatis < vt a < b ſignificet a minorem quam b.

El primer matemático que introdujo los símbolos de desigualdad “>” (mayor que) y “<” (menor que) fue Thomas Harriot (1520-1621) en su manuscrito "Artis analyticae praxis", el cual fue publicado después de su muerte.

Los símbolos que aparecieron en la publicación se muestran en la figura, pero se cree que los editores modernizaron los símbolos originales ya que estos eran curvos parecidos a cuernos.

CONCEPTOS CLAVES

- Desigualdades
- Intervalos
- Inecuaciones
- Gráfico

DESIGUALDADES

Una desigualdad es una expresión que utiliza los símbolos “>” (mayor), “<” (menor), “≥” mayor o igual o “≤” menor o igual.

Las desigualdades cumplen las siguientes propiedades:

1. Si se suman dos desigualdades de un mismo sentido se obtiene una desigualdad del mismo sentido.

$$\left.\begin{array}{l} a < b \\ c < d \end{array}\right| \rightarrow a + c < b + d \qquad \left.\begin{array}{l} a \leq b \\ c < d \end{array}\right| \rightarrow a + c < b + d$$

2. Si se suma o resta un número a ambos lados de una desigualdad, esta se conserva.

$a < b \rightarrow a + c < b + c$; $a \leq b \rightarrow a - c \leq b - c$

3. Si se multiplica o divide a ambos lados de una desigualdad por un número positivo, esta se conserva.

$a < b$ y $c > 0 \rightarrow ac < bc$; $a \leq b$ y $c > 0 \rightarrow ac \leq bc$

4. Si se multiplica o divide a ambos lados de una desigualdad por un número negativo, esta se invierte.

$a < b$ y $c < 0 \rightarrow ac > bc$; $a \leq b$ y $c < 0 \rightarrow \frac{a}{c} \geq \frac{b}{c}$

PROPIEDADES CON DESIGUALDADES EN LOS NÚMEROS REALES

En los números reales se cumplen las siguientes propiedades relativas a desigualdades:

- Si se tiene una desigualdad con ambos términos positivos, entonces sus cuadrados mantienen la desigualdad:
  $0 < a < b \rightarrow a^2 < b^2$

- Si se tiene una desigualdad con ambos términos negativos, entonces sus cuadrados invierten la desigualdad:
  $a < b < 0 \rightarrow a^2 > b^2$

- Si se tiene una desigualdad con ambos términos positivos o ambos negativos, entonces sus recíprocos invierten la desigualdad:
  $0 < a < b \rightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$; $a < b < 0 \rightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

- Si se tiene un número entre cero y uno, entonces a mayor exponente de la potencia se obtiene un número cada vez menor:
  $0 < a < 1 \quad \rightarrow \quad \ldots a^4 < a^3 < a^2 < a$

- Si se tiene un número mayor uno, entonces a mayor exponente de la potencia se obtiene un número cada vez mayor:
  $a > 1 \quad \rightarrow \quad \ldots a^4 > a^3 > a^2 > a$

- La suma de los cuadrados de dos números es mayor o igual que el doble del producto de los números:
  $a^2 + b^2 \geq 2ab$



INTERVALOS DE NÚMEROS REALES

Un intervalo es un subconjunto de números reales, existen diversos tipos de intervalos, los cuales pasamos a detallar a continuación:

Tipo de Intervalo	Descripción	Notación Conjuntista	Notación de Intervalo	Gráfico
Cerrado	Considera todos los números que están entre dos números, considerando los extremos.	$\{x \in \mathbb{R} / a \leq x \leq b\}$	[a, b]	
Abierto	Considera todos los números que están entre dos números, sin considerar los extremos.	$\{x \in \mathbb{R} / a < x < b\}$	]a, b[	
Intervalo semi abierto por la izquierda (o semi cerrado por la derecha)	Considera todos los números que están entre dos números, sin considerar el extremo izquierdo.	$\{x \in \mathbb{R} / a < x \leq b\}$	]a, b]	
Intervalo semi abierto por la derecha (o semi cerrado por la izquierda)	Considera todos los números que están entre dos números, sin considerar el extremo derecho.	$\{x \in \mathbb{R} / a \leq x < b\}$	[a, b[	
Intervalo no acotado por la izquierda	Considera todos los números que son menores (o menores o iguales) que un cierto número.	$\{x \in \mathbb{R} / x < a\}$ $\{x \in \mathbb{R} / x \leq a\}$	]– ∞, a[ ]– ∞, a]	
Intervalo no acotado por la derecha	Considera todos los números que son mayores (o mayores o iguales) que un cierto número.	$\{x \in \mathbb{R} / x > a\}$ $\{x \in \mathbb{R} / x \geq a\}$	]a, ∞[[a, ∞[	



TRADUCCIÓN DE ENUNCIADO CON DESIGUALDADES A EXPRESIÓN ALGEBRAICA

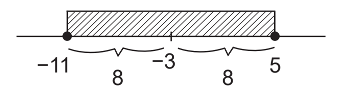
A continuación veremos cómo plantear algunos enunciados relacionados con desigualdades:

Enunciado	Expresión algebraica
A mayor que B	$A > B$
A menor que B	$A < B$
A mayor o igual que B	$A \geq B$
A menor o igual que B	$A \leq B$
A es a lo sumo igual a B	$A \leq B$
A es a lo menos B	$A \geq B$
A es a lo más B	$A \leq B$

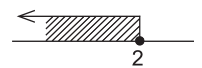
EJERCICIOS RESUELTOS

1. Los números que están a una distancia a los sumo igual a 8 del −3 y no son mayores que 2, corresponde al intervalo

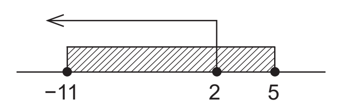
Solución
Los números que “están a una distancia a los sumo igual a 8 del −3” corresponde al intervalo:



Por otro lado los que “ no son mayores que 2” corresponde al intervalo:



Intersectando los dos intervalos obtenidos:



Se obtiene el intervalo [−11, 2].

2. Un servicio de taxis cobra una tarifa inicial de $1500 (llamada "bajada de bandera") más $130 por cada 200 metros de recorrido (lo que se va cobrando cuando finaliza los 200 m). Si un cliente tiene $3.000, ¿para cuántos km de recorrido le alcanza?

Solución:
Tenemos que la tarifa es 1500 + 130x donde x es la cantidad de tramos de 200 metros que haya recorrido, entonces planteamos la inecuación $1500 + 130x \leq 3000$, cuya solución es $x \leq 11,53\ldots$, es decir los $3.000 le alcanzará para un recorrido a lo sumo igual a 11 tramos de 200 metros, si transformamos esto a kilómetros, calculamos $\frac{11 \cdot 200}{1000}$ lo que nos arroja 2,2 km. Por lo tanto, con $3.000 le alcanza para un recorrido inferior a los 2,2 km.

3. Una mamá debe comprar cuadernos universitarios, estos pueden ser tapa blanda o tapa dura cuyos valores respectivos son $800 y $1200. Si la cantidad de cuadernos de tapa dura deben ser 5 más que los de tapa blanda y su gasto no debe exceder los $35.000, ¿cuál es la mayor cantidad posible de cuadernos de tapa dura que puede comprar?

Solución:
Supongamos que compra "x" cuadernos de tapa blanda, por lo tanto debe comprar "x + 5" de tapa dura. El gasto es entonces 1200(x+5) + 800x, el cual no debe exceder los $35.000, por lo que el enunciado del problema nos conduce a la inecuación $1200(x + 5) + 800x \leq 35000$, dividiendo por 100, obtenemos la inecuación equivalente $12(x + 5) + 8x \leq 350$, resolviendo obtenemos que $x \leq 14,5$, por lo que el mayor valor posible para los cuadernos de tapa blanda es 14 y por ende el mayor valor posible para los de tapa dura es 19.

4. Si a y b son números reales negativos tal que $a > b$, ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

I) $\frac{a}{b} > 1$

II) $\frac{a + b}{b} > 1$

III) $\frac{b - a}{a + b} > 1$

Solución:
Supongamos que I es correcta, tenemos que $\frac{a}{b} > 1$, multipliquemos a ambos lados de la desigualdad por b, como $b < 0$, la desigualdad se invierte, con lo que obtenemos $a < b$ y esto contradice el enunciado, luego I es falsa.
Supongamos ahora que II es correcta, tenemos que $\frac{a + b}{b} > 1$, al igual que lo que hicimos anteriormente, multiplicamos a ambos lados por b y como $b < 0$, la desigualdad se invierte, obteniéndose $a + b < b$, restando b a ambos lados, se llega a que $a < 0$, lo cual es correcto, por lo tanto II es verdadera.
Veamos ahora la afirmación III, se afirma que $\frac{b - a}{a + b} > 1$, como $a + b < 0$, al multiplicar por a + b a ambos lados de la desigualdad esta se invierte, con lo que obtenemos: $b - a < a + b$, restando b a ambos lados, se concluye que $-a < a$, lo cual es falso ya que $a < 0$, luego III es falsa. Conclusión, solo II es verdadera.

Nota: el método utilizado en este ejercicio consiste en desarrollar la afirmación dada, convirtiéndola a otra expresión equivalente, si concluimos que esta es verdadera (o falsa) la original también será verdadera (o falsa).

EJERCICIOS DE PRÁCTICA

1. El conjunto solución de la inecuación $x - 2x \leq -x + 3$ corresponde al conjunto:

A) $[1, \infty[$

B) $]-\infty, 1]$

C) $]-\infty, 0]$

D) ¡

E) $\varnothing$

2. Dados los intervalos: $A =]2, 4[$ y $B = [3, 5[$, entonces $A \cap B =$

A) $[3, 4[$

B) $[3, 4]$

C) $]3, 4[$

D) $]2, 5]$

E) $[2, 5[$

3. ¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

I) $-\frac{1}{3} \in \left]-\frac{2}{5}, -\frac{1}{4}\right[$

II) $2{,}7 \in \left[\frac{131}{50}, \frac{68}{25}\right[$

III) $1{,}\overline{9} \in \left]2, \frac{11}{5}\right]$

A) Solo I

B) Solo II

C) Solo I y II

D) Solo I y III

E) I, II y III

4. La solución de la inecuación: $\frac{x}{2} + 2 > \frac{3}{4}x - 1$ es el conjunto de números reales "x" que cumplen con que:

A) $x < 12$

B) $x > 12$

C) $x < 4$

D) $x > 4$

E) $x < 6$

5. Si $a - 1 > 5$ y $b + 2 > -6$, entonces $a + b$ es:

A) mayor que -4.

B) mayor que 2.

C) mayor que -2.

D) menor que 2.

E) menor que -2.

6. ¿Cuál(es) de las siguientes inecuaciones es equivalente a la inecuación $-x - \frac{1}{2} \geq -3$?

I) $x \leq \frac{5}{2}$

II) $-x \geq \frac{1}{2} - 3$

III) $3 - \frac{1}{2} \leq x$

A) Solo I

B) Solo II

C) Solo I y II

D) Solo II y III

E) Ninguna de ellas

7. Sean x e y dos números reales tales que $\frac{x}{y} \geq 4$, ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) **siempre** verdadera(s)?

I) $x \geq 4y$

II) $\frac{x}{y} - 4 \geq 0$

III) $\frac{x}{-y} \leq -4$

A) Solo I
B) Solo III
C) Solo I y II
D) Solo II y III
E) I, II y III

8. Sean a, b y c números reales y $a \neq 0$, se puede determinar que $x < \frac{c-b}{a}$, sabiendo que:

(1) $ax < c - b$
(2) $a > 0$

A) (1) por sí sola
B) (2) por sí sola
C) Ambas juntas, (1) y (2)
D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)
E) Se requiere información adicional

9. Si $x - 2y \leq -2$, ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

I) $x - 2y + 2 \leq 0$

II) $\frac{x - 2y}{-2} \geq 0$

III) $x - 2y \leq 0$

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo I y III
E) I, II y III

10. Si x es un número real tal que $0 < x < 1$, entonces ¿cuál(es) de las siguientes inecuaciones **cumple** siempre x?

I) $x^2 < x$
II) $x^3 < x^2$
III) $x^4 > x^2$

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo II y III
E) I, II y III

11. Si a y b son números reales tales que $ab > 0$, ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

I) $\frac{a}{b} > 0$

II) $\frac{b}{a} > 0$

III) $a^3b > 0$

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo II y III
E) I, II y III

12. Si a, b y c son números reales tales que $a < b$, $b < c$ y $c < 0$, entonces ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) **siempre** verdadera(s)?

I) $a + b < 0$
II) $ab > 0$
III) $bc > ac$

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo II y III
E) I, II y III

13. La edad de Juan está comprendida entre 12 y 15 años y la de Andrés es mayor que 16 y a lo sumo 28 años, ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) **siempre** verdadera(s)?

I) La suma de las edades es mayor que 28.
II) La suma es menor que 43.
III) La diferencia positiva de sus edades es menor que 16.

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo I y III
E) I, II y III

14. Sean a y b números reales, tales que $a \neq b$, se puede determinar que $\frac{a - b}{a + b} > 1$, sabiendo que:

(1) $b < 0$
(2) $a + b > 0$

A) (1) por sí sola
B) (2) por sí sola
C) Ambas juntas, (1) y (2)
D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)
E) Se requiere información adicional

15. Los lados de un triángulo ABC miden $a = x$, $b = 2x - 3$ y $c = x + 5$, entonces para que exista este triángulo, x debe medir:

A) más de dos cm.
B) más de tres cm.
C) más de cuatro cm.
D) menos de cuatro cm.
E) menos de diez cm.

16. Leonardo tiene el doble de la edad de su hermano Francisco menos tres años.
Si la suma de sus edades está comprendida entre seis y doce años, entonces la edad de Leonardo está comprendida entre:

A) 3 y 5 años.
B) 3 y 7 años.
C) 2 y 5 años.
D) 2 y 7 años.
E) 1 y 6 años.

17. Lo que le falta a un número para ser 27 es mayor o igual de lo que le falta a su doble para ser 30, por lo tanto el número es necesariamente:

A) mayor que 19.
B) a lo menos 19.
C) mayor que 57.
D) a lo menos 57.
E) a lo menos 3.

18. La edad de Carlos hace dos años era a lo sumo 20 años y la mitad de edad que tendrá en diez años será superior a ocho años. Entonces en tres años su edad estará en el intervalo:

A) [9, 25]
B)]9, 25[
C)]9, 25]
D)]10, 25]
E) [10, 24]

19. La suma de tres números consecutivos es a lo sumo 39, ¿cuál de las siguientes afirmaciones con respecto al mayor de los números es **siempre** verdadera?

A) es menor que 12.
B) es a lo sumo 12.
C) es menor que 14.
D) es a lo sumo 14.
E) es menor que 13.

20. Si p es un número real negativo, entonces **siempre** se cumple que:

I) $p^3 < p^2$

II) $p - 2p > p$

III) $\frac{p}{p-1} < 1$

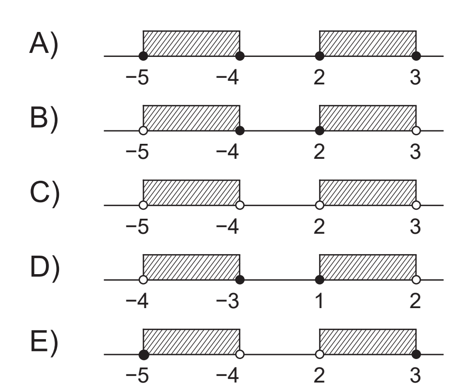
Es (son) verdadera(s):

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo II y III
E) I, II y III

21. Los lados de un triángulo ABC cumplen con que $\frac{3}{5} < AB < 2$, $1 < BC < \frac{5}{2}$ y $3 < AC < \frac{38}{10}$, entonces ¿cuál de las siguientes opciones podría corresponder al perímetro de este triángulo?

A) 4,0
B) 4,6
C) 4,7
D) 9,0
E) 12,2

22. ¿En cuál de los siguientes gráficos se representa a todos los números reales que están a una distancia mayor que tres y menor o igual que 4 del −1?



23. "El doble del cuadrado de un número entero x es a lo sumo igual al sucesor del triple de x", se expresa mediante la desigualdad :

A) $2x^2 \leq 3(x + 1)$

B) $2x^2 < 3(x + 1)$

C) $2x^2 \geq 3x + 1$

D) $2x^2 < 3x + 1$

E) $2x^2 \leq 3x + 1$

24. "El cuadrado de **a** sumado con el cuadrado del doble de **b** es a lo menos el triple del cuadrado de **c**, se expresa mediante la desigualdad":

A) $a^2 + (2b)^2 > (3c)^2$

B) $a^2 + (2b)^2 \geq (3c)^2$

C) $a^2 + (2b)^2 > 3c^2$

D) $a^2 + (2b)^2 \geq 3c^2$

E) $a^2 + 2b^2 \geq 3c^2$

25. ¿Cuántos números enteros positivos existen que cumplen con que su triple sumado con los tres cuartos de su sucesor es menor a 12?

A) 1

B) 2

C) 3

D) 4

E) 5

26. En un rectángulo el largo mide 2 cm más que el ancho y su perímetro es a lo sumo 22 cm. Si los lados miden un número entero de cm, entonces la máxima área posible es:

A) 8 cm^2

B) 15 cm^2

C) 24 cm^2

D) 35 cm^2

E) 48 cm^2

27. En un estanque hay 80 m^3 de agua y una bomba extrae 1,2 m^3 por hora.
Para que queden menos de 26 m^3 en el estanque, se deben esperar por lo menos:

A) 42 h

B) 43 h

C) 44 h

D) 45 h

E) 46 h

28. Tres números consecutivos son tales que la suma entre los dos tercios del menor con los tres cuartos del intermedio es más grande que el término mayor.
¿Cuál es el menor valor posible para el término mayor?

A) 4

B) 5

C) 6

D) 7

E) 8

29. La temperatura en un cierto laboratorio está regulada de modo que es mayor a 5°C y a lo más llega a 20°C.
Si la conversión entre grados Celcius a Fahrenheit es $°F = \frac{9}{5}°C + 32°$, entonces se puede afirmar que la temperatura de la habitación:

A) fluctúa entre los 41 °F y 68 °F.

B) es superior a los 41 °F y a lo más llega a los 68 °F.

C) es a lo menos 41 °F y a lo más se llega a los 68 °F.

D) es a lo menos 41 °F y menor a los 68 °F.

E) ninguna de las afirmaciones anteriores.

30. Un cuadrado tiene un área de a lo más 81 cm^2 y si sus lados aumentan en dos cm entonces el perímetro del nuevo cuadrado es superior a los 32 cm.
Si la medida del cuadrado original es un número entero de cm, ¿cuántos valores posibles existen para esta medida?

A) 1
B) 2
C) 3
D) 4
E) Más de 4.

31. En una liquidación las blusas valen \$5.000 y los pantalones \$12.000.
Si Belén lleva 10 unidades más de pantalones que de blusas y su presupuesto es inferior a \$256.000, ¿cuál es la cantidad máxima de blusas que puede llevar?

A) 7
B) 8
C) 9
D) 10
E) 12

32. Juan ha ahorrado entre monedas de 100 y 500 pesos una suma inferior a \$5.000, se sabe además que la cantidad de monedas de \$100 supera en 8 unidades a las de \$500.
Si hubiese ahorrado 2 monedas más de \$100 y una más de \$500, entonces lo ahorrado hubiese superado los \$5.000.
¿Cuál de las siguientes opciones es correcta con respecto a la cantidad de monedas de \$500 que ahorró?

A) Es inferior a 6.
B) Son 6.
C) Son 7.
D) Son 8.
E) Es superior a 8.

33. Un número está comprendido entre a y b, con $a < b$, si a este número se le resta un número negativo c y después se multiplica por un número negativo d, entonces el número obtenido es siempre mayor que:

A) $d(b + c)$
B) $d(b - c)$
C) $d(a + c)$
D) $d(a - c)$
E) b

34. Sea p un número real tal que $0 < p < 1$ y n un número entero positivo.
¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

I) $p^{n+1} > p^n$
II) $np \geq p^n$
III) $p^n \leq np^n$

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo II y III
E) I, II y III

35. Sean a y b dos números reales negativos, tal que $a > b$, ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

I) $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} > 0$
II) $\frac{a}{b} - \frac{b}{a} > 0$
III) $\frac{1 + \frac{b}{a}}{1 - \frac{b}{a}} > 0$

A) Solo I
B) Solo III
C) Solo I y II
D) Solo II y III
E) I, II y III

36. Sean a y b dos números reales negativos, tal que a > b, ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

I) $-a + b < a - b$

II) $(a - b)^3 > 0$

III) $\dfrac{a + b}{a - b} < 0$

A) Solo I
B) Solo III
C) Solo I y II
D) Solo II y III
E) I, II y III

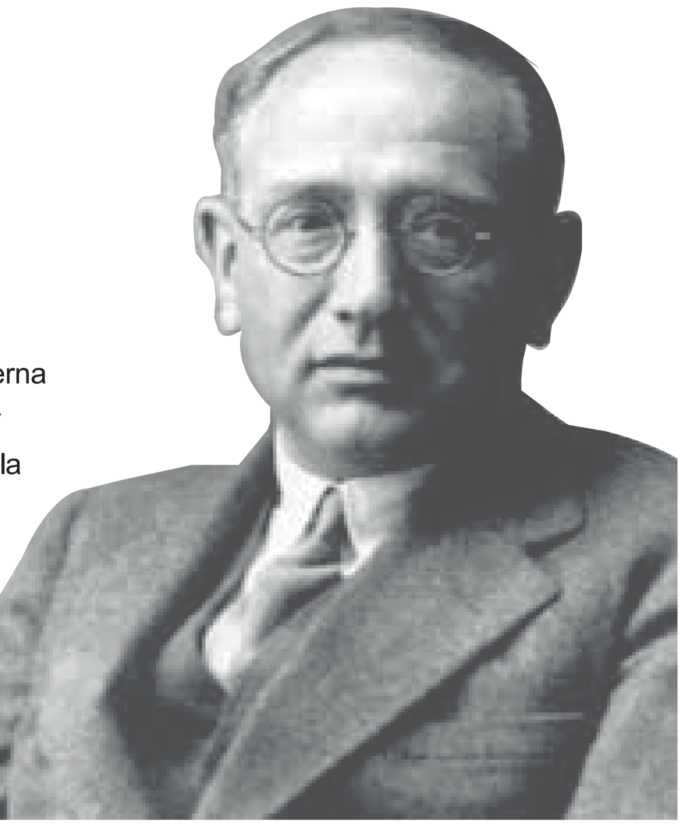
37. Sean m y n números reales y distintos tales que $m < n$ y $\dfrac{m + n}{m - n} > 1$, ¿cuál de las siguientes desigualdades es **siempre** verdadera?

A) $3n > 2m$
B) $n^2 > -n$
C) $m < 0$
D) $3n > 2n$
E) $3m > 2n$

RESPUESTAS CAPÍTULO 9									
1. D	**2.** A	**3.** C	**4.** A	**5.** C	**6.** C	**7.** D	**8.** C	**9.** E	**10.** C
11. E	**12.** C	**13.** E	**14.** C	**15.** C	**16.** B	**17.** E	**18.** C	**19.** D	**20.** E
21. C	**22.** E	**23.** E	**24.** D	**25.** B	**26. C**	**27.** E	**28.** C	**29.** B	**30.** C
31. A	**32.** B	**33.** B	**34.** D	**35.** A	**36. E**	**37.** C			

Capítulo
6

PLANTEO DE PROBLEMAS



George Pólya (1887-1985)

matemático húngaro, es uno de los nombres míticos en la historia moderna de las matemáticas y sus estudios y publicaciones estuvieron referidas a la resolución de problemas.

CONCEPTOS CLAVES

- Traducción a lenguaje algebraico
- Sistemas de ecuaciones
- Ecuación de primer grado



TRADUCCIÓN DE ENUNCIADO A LENGUAJE ALGEBRAICO

Si queremos resolver un problema, a través del planteo de una ecuación, debemos traducir lo expresado en el enunciado a lenguaje algebraico, para ello es conveniente considerar las siguientes conversiones.

El doble de x.. $2x$
El triple de x.. $3x$
El sucesor de n.. $n + 1$ (si $n \in \mathbb{N}$)
El antecesor de n .... $n - 1$ (si $n \in \mathbb{Z}$)
El cuadrado de x.. x^2
El cubo de x.. x^3
El inverso aditivo u opuesto de x...................... $-x$
A sumado con B... $A + B$
A restado con B... $A - B$
B disminuido en A... $B - A$
A sustraído de B... $B - A$
El producto entre A y B.................................... $A \cdot B$
El cuociente entre A y B.................................. $\frac{A}{B}$ (con $B \neq 0$)
El inverso multiplicativo o recíproco de x............ x^{-1} o $\frac{1}{x}$ (si $x \neq 0$)
Suma de los cuadrados entre A y B.................... $A^2 + B^2$
Cuadrado de la suma entre A y B..................... $(A + B)^2$
Número de dos cifras con el dígito de las decenas es d y el de las unidades es u.....$10d + u$



SISTEMAS DE ECUACIONES

Un sistema lineal de ecuaciones, con dos variables y dos incógnitas, es de la forma:
$$\begin{array}{l} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{array}$$
, donde las incógnitas son "x" e "y" y los demás son números reales.
Existen diversos métodos para resolver un sistema de ecuaciones, los más importantes son:

- Igualación
- Sustitución
- Reducción

Veamos algunos ejemplos, para distinguir cada uno de estos métodos.

Igualación

Ejemplo:

Resolver el sistema de ecuaciones $\left.\begin{array}{l} 2x - y = 13 \\ 6x + y = 19 \end{array}\right|$

Tanto en la primera como en la segunda ecuación despejamos "y" (o bien la otra incógnita):
Ecuación (1): $2x - y = 13 \;\rightarrow\; y = 2x - 13$
Ecuación (2): $6x + y = 19 \;\rightarrow\; y = 19 - 6x$, igualando ambas expresiones para "y", tenemos:
$2x - 13 = 19 - 6x \;\rightarrow\; 8x = 32 \;\rightarrow\; x = 4$
Reemplazando este valor en cualquiera de las ecuaciones, obtenemos el valor de "y".
Por ejemplo si se reemplaza $x = 4$ en la primera ecuación, obtenemos $8 - y = 13 \;\rightarrow y = -5$.

Sustitución

Ejemplo:

Resolver el sistema de ecuaciones $\left.\begin{array}{l} 5x - y = 28 \\ 3x + 2y = 9 \end{array}\right|$

Este método consiste en que en una de las dos ecuaciones despejamos una de las incógnitas, posteriormente, este valor obtenido se reemplaza en la otra ecuación.
Por ejemplo, si en la primera ecuación despejamos "y", tenemos que $y = 5x - 28$, ahora esta expresión la reemplazamos en la otra ecuación:
$3x + 2(5x - 28) = 9 \;\rightarrow\; 13x = 65 \;\rightarrow x = 5$, reemplazando en cualquiera de las ecuaciones del sistema, obtenemos el valor de "y".
Si en la primera ecuación, reemplazamos x por 5, se obtiene: $25 - y = 28 \;\rightarrow\; y = -3$.

Reducción

Ejemplo:

Resolver el sistema de ecuaciones $\left.\begin{array}{l} 4x - 5y = 49 \\ 5x + 3y = 15 \end{array}\right|$

Este método consiste en multiplicar una o ambas ecuaciones por ciertos factores, de modo que al sumar o restar ambas ecuaciones se elimine una de las incógnitas.
En este sistema, por ejemplo eliminaremos la incógnita "y" para ello multiplicaremos la primera ecuación por 3 y la segunda ecuación por 5, de modo que los coeficientes de "y" queden cambiados de signo:

$\left.\begin{array}{l} 4x - 5y = 49 \\ 5x + 3y = 15 \end{array}\right| \begin{array}{l} /\cdot 3 \\ /\cdot 5 \end{array} \;\rightarrow\; \left.\begin{array}{l} 12x - 15y = 147 \\ 25x + 15y = 75 \end{array}\right|$, sumando ambas ecuaciones, se obtiene $37x = 222 \;\rightarrow\; x = 6$, reemplazando este valor en cualesquiera de las ecuaciones, se obtiene $y = -5$.
En los ejercicios resueltos, veremos cómo los sistemas de ecuaciones nos permitirán resolver problemas.

EJERCICIOS RESUELTOS

1. Felipe tiene dos cuentas corrientes y en una de las cuentas tiene los $\frac{2}{3}$ de lo que tiene en la otra. Si saca $500.000 de una de ellas y la deposita en la otra, quedan iguales. ¿Cuánto dinero tenía inicialmente en cada una de ellas?

Solución:

Supongamos que los montos que tiene en las cuentas corrientes son x y $\frac{2}{3}x$.

Si saca $ 500.000 y lo deposita en la otra, entonces en cada una de ellas tendrá:

$x - 500000$ y $\frac{2}{3}x + 500000$, asumimos que debe sacar de la que tiene más dinero ya que posteriormente se afirma que quedan iguales:

$x - 500000 = \frac{2}{3}x + 500000 \rightarrow x - \frac{2}{3}x = 1000000 \rightarrow \frac{1}{3}x = 1000000 \rightarrow x = 3000000$,

Por lo tanto, lo que tenía inicialmente en las cuentas era: $x = 3.000.000$ y $\frac{2}{3}x = 2000000$

2. Un número tiene dos cifras de modo que la cifra de las decenas tiene una unidad más que el triple de la cifra de las unidades.

Si se suma el número con el número que resulta de invertir sus cifras, resulta 99, ¿cuál es el número?

Solución:

Supongamos que la cifra de las unidades es x, entonces según la información dada, la cifra de las decenas es $3x + 1$.

Sabemos que si un número tiene dos cifras, donde las unidades es "u" y las decenas es "d", entonces el número es $u+10d$, y en este caso el número es $x + 10 \cdot (3x + 1)$, entonces el número con las cifras invertidas sería $10x + (3x + 1)$.

El enunciado afirma que si se suman estos dos números el resultado es 99, entonces $x + 10 \cdot (3x + 1) + 10x + (3x + 1) = 99$, resolviendo esta ecuación se obtiene $x = 2$, por lo tanto el número es 72.

3. La suma de las edades de dos hermanos es 25 años y en 5 años más uno va a tener los $\frac{3}{4}$ de lo que tendrá el otro. ¿Qué edades tienen actualmente?

Solución:

Supongamos que las edades son x e y, entonces x + y = 25, en cinco años más las edades serán x + 5; y + 5, entonces $x + 5 = \frac{3}{4}(y + 5)$.

Entonces el enunciado nos lleva al siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 25 \\ x + 5 = \frac{3}{4}(y + 5) \end{array}\right|$$

, multiplicando la segunda ecuación por 4, para eliminar las fracciones, resulta:

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 25 \\ 4x + 20 = 3(y + 5) \end{array}\right|$$

, ordenando, se llega al sistema:

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 25 \\ 4x - 3y = -5 \end{array}\right|.$$

Podemos resolver este sistema con cualquiera de los métodos vistos anteriormente, acá lo resolveremos por sustitución.

Despejamos una incógnita de la primera ecuación, por ejemplo si despejamos“x”, tenemos $x = 25 - y$, y esto lo reemplazamos en la segunda ecuación:

$4(25 - y) - 3y = -5$, resolviendo esta ecuación obtenemos y = 15, sustituyendo en cualesquiera de las ecuaciones obtenemos x = 10, luego las edades son 10 y 15 años.

4. Francisco lleva ahorrado $5.200 en monedas de $100 y $500.

Si el total de monedas son 20, ¿cuántas tiene de cada denominación?

Solución:

Supongamos que tiene x monedas de $100 e y monedas de $500, entonces podemos plantear el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 20 \\ 100x + 500y = 5200 \end{array}\right|,$$

en este sistema se puede reducir la segunda ecuación si dividimos por 100:

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 20 \\ x + 5y = 52 \end{array}\right|$$

, si restamos la segunda ecuación con la primera (o usando cualquier otro método), se obtiene: $5y - y = 32 \rightarrow y = 8$, reemplazando en cualquiera de las ecuaciones se concluye que x = 12, luego tiene 12 monedas de $100 y 8 monedas de $500.

EJERCICIOS DE PRÁCTICA

1. ¿Qué número entero es tal que al sumarle el triple de su antecesor da 77?

A) 19
B) 20
C) 21
D) 22
E) 24

2. ¿Qué número par es tal que al sumarlo con su sucesor par da 42?

A) 10
B) 12
C) 20
D) 22
E) 24

3. En un rectángulo el largo mide 3 cm más que el ancho y su perímetro es 54 cm.
¿Cuánto mide su largo?

A) 12 cm
B) 15 cm
C) 18 cm
D) 25,5 cm
E) 28,5 cm

4. Una piscina está llena hasta los $\frac{3}{5}$ de su capacidad.
Si le faltan 1.200 litros para llenarla, ¿cuál es su capacidad?

A) 480 litros
B) 800 litros
C) 2.000 litros
D) 3.000 litros
E) 3.200 litros

5. Si se divide el sucesor del doble de un número con el antecesor del número resulta 3, entonces ¿cuál es el sucesor del cuadrado del número?

A) 4
B) 5
C) 10
D) 17
E) 26

6. Un número entero sumado con el doble de su antecesor da 28.
¿Cuál es el antecesor del número?

A) 9
B) 10
C) 11
D) 21
E) 22

7. Se tienen tres números consecutivos, tales que la diferencia entre el cuadrado del intermedio con el cuadrado del menor equivale al triple del mayor.
Entonces uno de estos números puede ser:

A) –6
B) –5
C) 4
D) 5
E) 7

8. Si un sector rectangular tiene un perímetro de 40 m y es de tal manera que su ancho tiene 4 m menos que su largo, la ecuación que permite conocer el ancho “x” es:

A) $2x + 4 = 40$
B) $4x + 4 = 40$
C) $2x - 4 = 20$
D) $2x + 4 = 20$
E) $2x + 8 = 20$

9. Raúl compró 1,2 kg de pan más una bolsa de papel de \$50, pagó con un billete de \$1.000 y una moneda de \$100, y recibió un vuelto de \$30.
Según la información dada, ¿cuánto cuesta un kilo de pan?

A) $\$833,\overline{3}$
B) $\$841,\overline{6}$
C) \$850
D) \$930
E) $\$933,\overline{3}$

10. Se puede determinar tres números consecutivos, sabiendo que:

(1) La suma del menor con el mayor da el doble del central.
(2) La suma de los tres números es 33.

A) (1) por sí sola
B) (2) por sí sola
C) Ambas juntas, (1) y (2)
D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)
E) Se requiere información adicional

11. Las edades de dos hermanos suman 40 años y uno tiene los $\frac{3}{5}$ de los que tiene el otro. ¿Cuál es la diferencia entre sus edades?

A) 10 años
B) 15 años
C) 20 años
D) 25 años
E) 30 años

12. En un triángulo el ángulo menor mide 26° menos que el del medio y 28° menos que el mayor. ¿Cuánto mide el mayor de los ángulos interiores?

A) 42°
B) 60°
C) 68°
D) 70°
E) 78°

13. En un jardín hay 31 flores entre calas, orquídeas y pensamientos. Siendo las orquídeas un tercio de los pensamientos y estos cuatro más que las calas.
¿Cuántos son los pensamientos?

A) 6
B) 7
C) 14
D) 15
E) 21

14. Una madre reparte $12.000 entre sus dos hijos de modo que el mayor recibió $3.000 más que el doble de lo que recibió el otro, ¿cuánto recibió el menor?

A) $2.000
B) $3.000
C) $6.000
D) $7.500
E) $9.000

15. Cuando uno de dos hermanos nació, el mayor tenía nueve años.
Si uno de ellos tiene un año más que el doble del otro, ¿cuánto suman sus edades?

A) 8
B) 12
C) 17
D) 25
E) 34

16. Un cuadrado tiene 14 cm más de perímetro que un triángulo equilátero. Si la suma de los perímetros de ambas figuras es 26 cm, ¿cuál es el área del cuadrado?

A) 4 cm^2
B) 6 cm^2
C) 8 cm^2
D) 20 cm^2
E) 25 cm^2

17. Dos cajas pesan 102 kilos y si se sacan 7 kilos de una y se depositan en la otra, quedan iguales. ¿Cuántos kilos tiene la más pesada?

A) 48
B) 51
C) 56
D) 58
E) 65

18. Dos libros han costado $13.000 y el doble del precio del más barato vale $200 más de lo que cuesta el otro. ¿Cuál es la diferencia entre los precios de ambos libros?

A) $2.200
B) $3.200
C) $4.200
D) $4.400
E) $8.600

19. Las edades de Pedro y Luis están en la razón de 5:4 y hace tres años estaban en la razón 4:3. ¿Cuánto suman sus edades actuales?

A) 19 años.
B) 21 años
C) 24 años
D) 27 años.
E) 36 años.

20. Doña Pepa lleva 3 kg de tomates y 2 de limones en $1.300. Si hubiese llevado 2 kg de tomates y 3 de limones le habría costado $100 menos. ¿Cuánto vale cada kilo de limones?

A) $126
B) $150
C) $200
D) $250
E) $300

21. Un taller mecánico vende aceite para autos en dos formatos, bidones de dos y cinco litros cada uno. En total en el taller hay 26 bidones y 100 litros de aceite.
¿Cuántos bidones de dos litros hay?

A) 8
B) 10
C) 12
D) 15
E) 16

22. Hace ”a” años las edades de dos hermanos sumaban “10 a”. ¿Cuál será el promedio de sus edades en “a” años más?

A) 5,5 a
B) 6 a
C) 6,5 a
D) 7 a
E) 12 a

23. Paula ahorró $11.000 en monedas de $100 y $500, se puede saber cuántas monedas de cada tipo ahorró sabiendo que:

(1) Son 30 monedas.
(2) Lo ahorrado en monedas de $500 es 10 veces lo ahorrado en monedas de $100.

A) (1) por sí sola
B) (2) por sí sola
C) Ambas juntas, (1) y (2)
D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)
E) Se requiere información adicional

24. En un campeonato de fútbol, si un equipo gana un partido recibe 3 puntos y si empata gana 1 punto. Si en 6 partidos un equipo permanece invicto con 14 puntos, ¿cuántos partidos ha ganado?

A) 1
B) 2
C) 3
D) 4
E) 5

25. En una compra de útiles escolares, Pedro compra dos lápices de mina y cuatro de pasta en $1.800. Si el lápiz de pasta cuesta $150 más que el lápiz de mina, ¿qué valor tiene este último?

A) $150
B) $200
C) $250
D) $350
E) $400

26. Un matrimonio tiene tres hijos: el mayor y dos gemelos. El mayor tenía dos años cuando nacieron los gemelos y actualmente sus edades suman 14 años, ¿qué edad tienen los gemelos?

A) 2
B) 3
C) 4
D) 5
E) 6

27. Se puede determinar un número de dos cifras, sabiendo que:

(1) La suma de las cifras es 9.

(2) Si se suma el número con el que resulta de invertir sus cifras resulta 99.

A) (1) por sí sola
B) (2) por sí sola
C) Ambas juntas, (1) y (2)
D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)
E) Se requiere información adicional

28. Un peluquero en tres días de trabajo recaudó $180.000. En el segundo día atendió a dos clientes más que en el primer día y en el tercer día atendió 4 más que en el primer día. Si a cada uno de los clientes le cobró $6.000 por el corte, ¿cuántos atendió el segundo día?

A) 8
B) 10
C) 12
D) 18
E) 20

29. Con un hilo de 64 cm se construye un rectángulo cuyo largo mide 4 cm más que el ancho. ¿Cuál es el área de este rectángulo?

A) 252 cm^2
B) 396 cm^2
C) 572 cm^2
D) 780 cm^2
E) 1.020 cm^2

30. Felipe compra un ramo de flores que contenía 18 claveles y 6 rosas en $6.600.
Si las rosas valen $100 más que los claveles, ¿cuánto vale cada una de las rosas?

A) $200
B) $250
C) $300
D) $350
E) $450

31. En una fiesta hay 12 mujeres más que hombres. Si se retiran 4 mujeres y 2 hombres, el número de hombres equivaldría a la mitad del número de mujeres.
¿Cuántos hombres había en un principio?

A) 10
B) 12
C) 14
D) 20
E) 24

32. En un juego de tiro al blanco se asignan 100 puntos por cada acierto y se descuentan 50 por cada error. Si un jugador lanzó 30 veces obteniendo 1500 puntos ¿cuál fue el número de aciertos?

A) 10
B) 15
C) 20
D) 25
E) 29

33. Pedro tiene \$A y su hermano Diego tiene \$B. Si Pedro le da \$200 a Diego quedan ambos con igual cantidad de dinero y si el padre de ellos le hubiese dado \$ 500 a Pedro y le hubiese quitado \$100 a Diego, entonces Pedro quedaría con el doble de lo que tendría Diego.
¿Cuál de los siguientes sistemas permite determinar el dinero que tenían inicialmente?

A) $A + 200 = B - 200$
$2(A - 500) = B + 100$

B) $A + 200 = B - 200$
$2(A + 500) = B - 100$

C) $A - 200 = B + 200$
$2(A + 500) = B - 100$

D) $A + 200 = B - 200$
$A + 500 = 2(B - 100)$

E) $A - 200 = B + 200$
$A + 500 = 2(B - 100)$

34. Francisco tiene \$p en a monedas de \$50 y b monedas de \$100.
Si el total de monedas son 10, ¿cuál de los siguientes sistemas permite determinar cuántas monedas tiene de cada denominación?

A) $a + b = 10$
$\frac{50}{a} + \frac{100}{b} = p$

B) $a + b = 10$
$100a + 50b = p$

C) $a + b = 10$
$\frac{a}{50} + \frac{b}{100} = p$

D) $a + b = 10$
$\frac{a}{50} + \frac{b}{100} = 10$

E) $a + b = 10$
$50a + 100b = p$

35. Un número sumado con la mitad de la edad de Pablo da 40. Si se suman las edades de Pablo con la de su hermano Joaquín resultan 20 años y si se suma la edad de Pablo con el doble de la edad de Joaquín resulta 28 años, ¿cuál es el número?

A) 8
B) 12
C) 20
D) 34
E) 68

36. En un supermercado, 3 kilos de paltas y 2 kilos de tomate valen $8.900. Se puede determinar cuánto vale el kilo de paltas si se sabe que:

(1) 2 kilos de paltas y 3 kilos de tomates valen $7.350.

(2) El kilo de paltas vale $1.550 más que el kilo de tomates.

A) (1) por sí sola
B) (2) por sí sola
C) Ambas juntas, (1) y (2)
D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)
E) Se requiere información adicional

37. El promedio de dos números es 29 y si se dividen el cuociente resulta 3 y el resto 2. ¿Cuál es el número mayor?

A) 14
B) 15
C) 29
D) 43
E) 44

38. Juan va a comprar bebidas y papas fritas , para ello lleva $ 3600.
Si comprara 3 latas de bebida y 2 bolsas de papas le faltarían $ 100 y si comprara 2 latas de bebida y 3 bolsas de papas, le sobrarian $ 50. ¿Cuánto vuelto recibiría, si compra una bolsa de papas y una lata de bebida?

A) $1.450
B) $2.150
C) $2.250
D) $2.350
E) $2.170

39. En un cine la entrada normal vale $600 más que la de estudiantes.
A una función asisten 50 personas de las cuales 10 cancelaron entrada de estudiantes, recaudándose $114.000, ¿cuánto valía la entrada para estudiantes?

A) $1.400
B) $1.800
C) $2.000
D) $2.200
E) $2.400

40. Un vaso está lleno de agua, si se bota el 20% de su contenido, el vaso con el agua tendrían una masa de 320 gramos y si se hubiese botado un tercio de su contenido, habrían tenido una masa de 300 gramos. ¿Cuál es la masa del vaso?

A) 150 gramos
B) 160 gramos
C) 180 gramos
D) 200 gramos
E) 20 gramos

41. Los alumnos de un curso deben reunir fondos para comprar un TV para su sala, para ello, se dividirá el dinero a recaudar en partes iguales. Se puede determinar cuánto es el dinero a reunir sabiendo que:

(1) Si cada uno aporta $4000 sobrarían $12.000.

(2) Si cada uno aporta $3000 faltarían $16.000.

A) (1) por sí sola
B) (2) por sí sola
C) Ambas juntas, (1) y (2)
D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)
E) Se requiere información adicional

42. Un número tiene dos cifras donde la cifra de las unidades es p y la de las decenas es b. SI la suma de las cifras es 5 y si al número se le suma 9 resulta el número con las cifras invertidas, ¿cuál de los siguientes sistemas permite determinar las cifras del número?

A) $b + p + p + b = 5$
$10b + p + 9 = 10p + b$

B) $10b + p + 9 = 10b + p$
$10b + p = 5$

C) $b + p + 9 = p + b$
$b + p = 5$

D) $10p + b + 9 = 10b + p$
$b + p = 5$

E) $10b + p + 9 = 10p + b$
$b + p = 5$

43. Si a un número que tiene dos cifras se le resta la suma de sus cifras resulta 54 y si al número se le resta el que resulta al invertir sus cifras resulta 27. ¿Cuál el doble del número?

A) 12
B) 18
C) 63
D) 72
E) 126

44. Juan quiere instalar una enciclopedia en una biblioteca cuyos compartimientos son de igual tamaño. Al ponerla en los compartimientos se da cuenta que si coloca cuatro tomos en cada compartimiento le sobraría un tomo y si los pone de a cinco el último compartimiento quedaría vacío. ¿Cuántos compartimientos tiene la biblioteca?

A) 4
B) 5
C) 6
D) 7
E) 8

45. Un vehículo recorre una cierta distancia a una rapidez constante de 90 km/h, si hubiese ido a 100 km/h se hubiese demorado 5 minutos menos. ¿Qué longitud tenía el trayecto?

A) 50 km
B) 60 km
C) 70 km
D) 75 km
E) 120 km

46. En un curso, la razón entre el número de hombres y el número de mujeres es 5 : 3 y si se retiran 4 hombres y se agregan tres mujeres, la razón es 7 : 6. ¿Qué diferencia había inicialmente entre hombres y mujeres?

A) 3
B) 5
C) 10
D) 15
E) 20

47. x cuadernos de un mismo tipo valen \$p, si comprara dos más le harían un descuento de un 5%, en este caso ¿cuánto hubiese pagado?

A) $\frac{(x+2)p}{x} - \frac{5}{100}$

B) $(0{,}95) \cdot \frac{(x+2)p}{x}$

C) $(0{,}05) \cdot \frac{(x+2)p}{x}$

D) $(0{,}95) \cdot \frac{xp}{x+2}$

E) $(0{,}9) \cdot \frac{(x+2)p}{x}$

48. Se obtienen \$150.000 como capital final al invertir un monto "x" durante 48 meses. Si al transcurrir un año el capital aumenta un 10% respecto a lo acumulado el año anterior, ¿cuál de las siguientes ecuaciones permite determinar el capital x, suponiendo que no hubo depósitos ni retiros durante todo el período?

A) $150000 = x(1 + 0{,}1)^{48}$

B) $150000 = x(1+0{,}1)^{4}$

C) $150000 = x(1+0{,}01)^{4}$

D) $x = 150000(1+0{,}1)^{4}$

E) $x(1+0{,}1 \cdot 4) = 150000$

49. El largo de un rectángulo se disminuye en 10 cm y el ancho aumenta en 10 cm, obteniéndose un rectángulo que tiene 50 cm² más que el original. ¿Cuál es la diferencia en cm, entre los lados distintos del rectángulo original?

A) 5

B) 10

C) 15

D) 30

E) Falta información para determinarlo.

50. En una compañía de electricidad, el cobro mensual consiste en un modelo lineal, donde se aplica un cargo fijo de \$F más un monto que depende de la cantidad de kWh consumidos. Si por el consumo de x kWh se ha cobrado un monto de \$T, ¿cuál de las siguientes expresiones corresponde(n) al valor de la cuenta por un consumo de (x + 2) kWh?

I) $\left(\frac{T-F}{x}\right) \cdot (x+2)$

II) $F + \frac{(T-F)\cdot(x+2)}{x}$

III) $T + 2\left(\frac{T-F}{x}\right)$

A) Solo I

B) Solo II

C) Solo I y II

D) Solo II y III

E) I, II y III

51. El 50% de la mitad de un número es 20 , entonces el número es:

A) 5

B) 10

C) 20

D) 40

E) 80

52. a es el 10% de b y b es el 10% de c, Si c = 10, entonces a =

A) 0,01

B) 0,1

C) 1

D) 10

E) 100

53. Una camisa con un 20% de descuento cuesta $ 4.000. ¿Cuánto costaría sin la rebaja?

A) $ 4.800
B) $ 5.000
C) $ 5.200
D) $ 5.400
E) $ 5.500

54. En un curso hay 1 mujer por cada 4 hombres. ¿Que % del curso son mujeres?

A) 20%
B) 25%
C) 30%
D) 40%
E) 80%

55. El 12% de 50, es equivalente con:

I) 20% de 30
II) 30% de 20
III) 15% de 40

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo I y III
E) I, II y III

56. Se ha cancelado $ 42.000, que corresponde al 60% de una deuda, ¿Cuánto falta por pagar?

A) $ 14.000
B) $ 28.000
C) $ 30.000
D) $ 70.000
E) $ 112.000

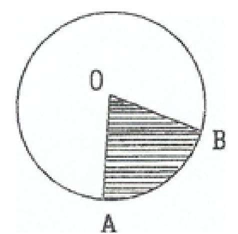
57. El 20% del área de un cuadrado es 20 cm^2, ¿Cuál es su perímetro?

A) 100 cm
B) 40 cm
C) 25 cm
D) 20 cm
E) 10 cm

58. De un libro de 120 páginas, he leído 96. ¿Qué % me queda por leer?

A) 1%
B) 5%
C) 20%
D) 25%
E) 40%

59. ¿Qué % de la superficie del círculo de centro 0, está sombreada, si ∡ AOB = 72^0?



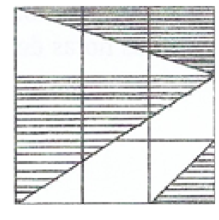
A) $\frac{1}{5}$ %
B) 5%
C) 20%
D) 25%
E) 40%

60. Un rectángulo tiene lados de 8 y 10 cm. Si el largo aumenta en un 20% y el ancho disminuye en un 25%. ¿En que % varía el área?

A) Disminuye un 10%
B) Aumenta un 10%
C) No varía
D) Disminuye más de un 10%
E) Aumenta más de un 10%

61. La figura está formada por 9 cuadrados congruentes. ¿Aproximadamente, que % del cuadrado ABCD está sombreado?

A) 50%
B) 55%
C) 60%
D) 65%
E) 70%



62. Un hotel con capacidad para 800 pasajeros está completo; si un día se va un 30% de los pasajeros y llega un 15% de la capacidad, ¿Cuántos pasajeros faltan para que el hotel esté nuevamente completo?

A) 680
B) 634
C) 560
D) 240
E) 120

63. Una emisora transmite 16 horas al día. Si su programación consiste en un 65% de música popular, 25% de música folclórica y el resto corresponde a música selecta, entonces, ¿Cuántas horas dedica la emisora a música selecta?

A) 1h 6 min.
B) 1h 10 min.
C) 1h 36 min.
D) 2 horas
E) Ninguna de las anteriores

64. Un poste tiene enterrado el 20% de su longitud total. Si la parte no enterrada mide 12m. ¿Cuál es la longitud total del poste?

A) 2,4 m.
B) 9,6 m.
C) 27 m.
D) 18 m.
E) 15 m.

65. El 25% de la edad del padre es la del hijo, y el 30% de la edad del hijo es 3. ¿Qué edad tiene el padre?

A) 30
B) 40
C) 50
D) 60
E) 70

66. a sumado con el 30% de 6 da el 40% de 8. Entonces el 10% de a es:

A) 0,05
B) 0,5
C) 0,14
D) 1,4
E) 14

67. Sólo 12 alumnas de un curso de 30, han pagado una cuota para un paseo. ¿Qué % del curso falta por pagar?

A) 40%
B) 45%
C) 55%
D) 60%
E) 65%

68. En un cierto día, el % de asistencia de un curso fue de un 70%, si los asistentes eran 28, ¿cuántos alumnos en total tiene el curso?

A) 12
B) 36
C) 38
D) 40
E) 52

69. En una hacienda, el 20% de la tierra se destina a una plantación de árboles forestales, y un 25% del terreno restante para papas y el resto que corresponde a 66 hectáreas, se destina al cultivo de cereales. ¿Cuántas hectáreas tiene el terreno?

A) 29,7
B) 110
C) 120
D) $146\frac{2}{3}$
E) 165

70. Después de retirar el 10% de lo que tenía ahorrado en una cuenta, me quedó un saldo de $13.500, ¿cuánto tenía al principio?

A) $ 13.635
B) $ 14.000
C) $ 14.850
D) $ 15.000
E) Ninguna de las anteriores

RESPUESTAS CAPÍTULO 5									
1. B	**2.** C	**3.** B	**4.** D	**5.** D	**6.** A	**7.** B	**8.** D	**9.** C	**10.** B
11. A	**12.** D	**13.** D	**14.** B	**15.** D	**16.** E	**17.** D	**18.** C	**19.** D	**20.** C
21. B	**22.** D	**23.** D	**24.** D	**25.** B	**26.** C	**27.** E	**28.** B	**29.** A	**30.** D
31. B	**32.** C	**33.** E	**34.**E	**35.** D	**36.** D	**37.** E	**38.** B	**39.** B	**40.** D
41. C	**42.** E	**43.** E	**44.** C	**45.** D	**46.** C	**47.** B	**48.** B	**49.** C	**50.** D
51. E	**52.** B	**53.** B	**54.** A	**55.** E	**56.** B	**57.** B	**58.** C	**59.** C	**60.** A
61. B	**62.** E	**63.** C	**64.** E	**65.** B	**66.** C	**67.** D	**68.** D	**69.** B	**70.** D

MINIENSAYO

EJE ÁLGEBRA

Tiempo: 70 minutos

1. Si $x - 2y = 3$, entonces $x^2 - 4xy + 4y^2 =$

A) 3
B) 6
C) 7
D) 9
E) 12

2. ¿Cuál es la diferencia, en unidades cúbicas, en ese orden, de los volúmenes de dos cubos cuyas aristas miden $(a + 2)$ y $(a - 2)$ unidades?

A) 64
B) 16
C) 8
D) $4(3a^2 + 4)$
E) $12a(2 + a)$

3. ¿Cuál(es) de las siguientes expresiones es (son) factor(es) de la expresión $(1 + x)^2 - (1 + x)(1 - x)$?

I) $2x$
II) $2 + 2x$
III) $x + x^2$

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo II y III
E) I, II y III

4. ¿Cuál de las siguientes expresiones **NO** es equivalente a la expresión $4x^2 - 24x + 32$?

A) $(2x - 4)(2x - 8)$
B) $(4 - 2x)(8 - 2x)$
C) $(4x - 8)(x - 4)$
D) $4x(x - 6) + 32$
E) $4x^2 - 4(6x + 8)$

5. Sean **a** y **b** números reales, tales que $a + b = 6$ y $ab = 2$, entonces $a^2 + 8ab + b^2 =$

A) 52
B) 48
C) 44
D) 42
E) 40

6. Si $a - b = -4$ y $ab = 2$, entonces $a^2 + b^2 =$

A) 20
B) 16
C) 18
D) 14
E) 10

7. ¿Cuál de los siguientes gráficos representa mejor al conjunto solución de las inecuaciones $1 \leq x - 1 < 2$?

A) —●/////○— 1 2

B) —●/////○— 2 3

C) —○/////●— 2 3

D) ////●———○//// 2 3

E) —○/////○— 2 3

8. La diferencia entre los precios de dos artículos es \$300. Si se compran dos del más barato y tres del más caro cuestan \$7.350, entonces ¿cuánto vale el más barato?

A) \$ 1.290
B) \$ 1.350
C) \$ 1.590
D) \$ 1.650
E) \$ 3.300

9. Sea el sistema de ecuaciones, $\left.\begin{array}{l}(a-1)x + by = 3 \\ (b+1)x - ay = -1\end{array}\right|$, si la solución del sistema es (3,2), entonces, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

A) $b > a$
B) $a + b < 0$
C) $ab > 0$
D) $a - b > 0$
E) $2a + b < 0$

10. Sea el sistema de ecuaciones, $\left.\begin{array}{l}kx - (k-2)y = 10 \\ (k+3)x - ky = 15\end{array}\right|$, ¿para qué valor de "k" el sistema tiene infinitas soluciones?

A) -3
B) -2
C) 0
D) 6
E) No existe tal valor de k.

11. El perímetro de un rectángulo es 50 cm, ¿cuál de las siguientes funciones modela el área de este rectángulo si "x" es la medida de uno de sus lados?

A) $g(x) = -x^2 + 25x$
B) $h(x) = x^2 - 25x$
C) $j(x) = -x^2 + 50x$
D) $k(x) = -x^2 - 50x$
E) $m(x) = -x^2 + 50x$

12. En los rectángulos en que el largo (x) es igual al doble del ancho, la diagonal en función del largo es:

A) $2x\sqrt{5}$

B) $x\sqrt{5}$

C) $\frac{x}{2}\sqrt{5}$

D) $2x\sqrt{3}$

E) $\frac{3}{2}x$

13. ¿Cuál(es) de las siguientes relaciones se puede(n) escribir como una función cuadrática de la forma $f(x) = kx^2$, con k una constante y con dominio el conjunto de los reales positivos?

I) El área de un cubo en función de su arista.
II) El área de un triángulo equilátero en función de su lado.
III) El área de una semicircunferencia en función de su diámetro.

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo I y III
E) I, II y III

14. El monto C(t) que tiene ahorrado Cristina en una cuenta corriente se modela con la función $C(t) = 500000 - 25000t$, donde t es el número de meses transcurridos desde que abrió la cuenta. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

I) Su ahorro baja mensualmente $25.000.
II) Al inicio tenía $500.000
III) A los 20 meses ya no tendrá dinero en su cuenta.

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo II y III
E) I, II y III

15. Sean f y g funciones definidas en los reales mediante $f(x) = x + 2$ y $g(x) = x + 3$, ¿cuál es la preimagen del cero en la función compuesta (fog)(x)?

A) -5
B) 5
C) -3
D) -2 o -3
E) $-\frac{5}{2}$

16. En un rectángulo, el largo mide 3 cm más que el ancho, se puede determinar las longitudes de estos lados, sabiendo que:

(1) Su área es 108 cm^2.
(2) Su diagonal mide tres cm más que su largo.

A) (1) por sí sola
B) (2) por sí sola
C) Ambas juntas, (1) y (2)
D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)
E) Se requiere información adicional

17. Sea las función definida mediante $f(x) = -\sqrt{x-2} + 3$, ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

I) Su dominio es el conjunto $[2 , \infty[$.
II) La preimagen del -2 es 27.
III) Su gráfica intersecta al eje x en un punto de abscisa 11.

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo II y III
E) I, II y III

18. Sea la ecuación de segundo grado, $(k - 3)x^2 - kx + 4 = 0$, ¿cuál(es) (es) son los posibles valores de “k” para que las soluciones sean reales e iguales?

I) 3
II) 4
III) 12

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo III
D) Solo II y III
E) I, II y III

19. ¿Cuál es el conjunto de todos los valores de “a” para que la ecuación en x, $(x + a)^2 + 2a - 1 = 0$ tenga dos soluciones reales y distintas?

A) $\left]-\infty, -\frac{1}{2}\right]$

B) $\left]-\infty, -\frac{1}{2}\right[$

C) $\left]-\infty, \frac{1}{2}\right[$

D) $\left]-\infty, \frac{1}{2}\right]$

E) $\mathbb{R}$

20. Sea f una función cuyo dominio es el conjunto de los números reales, definida por $f(x) = a(x - 3)^2 + 2$, con **a** un número real distinto de cero. ¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) **siempre** verdadera(s)?

I) La gráfica pasa por el punto $(2, 2 + a)$.
II) El recorrido de la función son los números reales mayores o iguales que 2.
III) El vértice de la parábola asociada a la función es el punto (3,2).

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo I y III
E) I, II y III

21. La altura h(t) (en metros) que alcanzará un proyectil después de t segundos de haber sido disparado, está dada por la fórmula: $h(t) = 20t - 5t^2$. ¿A los cuántos segundos alcanzará una altura de 15 m?

I) 1
II) 2
III) 3

A) Solo I
B) Solo III
C) Solo I y II
D) Solo I y III
E) Solo II y III

22. Un número tiene dos cifras, el dígito de las unidades es **b** y el de las decenas es **a**. Se sabe que la suma de las cifras es 10 y si se suma el número con el doble del número que resulta de invertir sus cifras resulta 189, ¿cuál de los siguientes sistemas permite resolver el problema de determinar las cifras del número?

A) $\begin{array}{l} a + b = 10 \\ ab + 2ba = 189 \end{array}$

B) $\begin{array}{l} a + b = 10 \\ 10ab + 2(10ba) = 189 \end{array}$

C) $\begin{array}{l} a + b = 10 \\ 10a + b + 2(10b + a) = 189 \end{array}$

D) $\begin{array}{l} a + b = 10 \\ 10b + a + 2(10a + b) = 189 \end{array}$

E) $\begin{array}{l} 10a + b = 10 \\ 10b + a + 2(10a + b) = 189 \end{array}$

23. Sea la ecuación cuadrática, $ax^2+(a-1)x+2=0$, se puede determinar el valor de **a** sabiendo que:

(1) Una de las soluciones es $x = -2$.

(2) El discriminante de la ecuación es 25.

A) (1) por sí sola
B) (2) por sí sola
C) Ambas juntas, (1) y (2)
D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)
E) Se requiere información adicional

24. Sea f una función definida en los reales, mediante $f(x + 1) = 3f(x - 1) - 2$, si $f(6) = 82$, entonces $f(0) =$

A) 4

B) 2

C) $\frac{35}{9}$

D) $\frac{32}{9}$

E) $\frac{8}{3}$

25. La parábola que representa a la gráfica de una función cuadrática cuyo dominio son los números reales, intersecta al eje de las abscisas solo en el punto (2,0) y al eje de las ordenadas en el punto (0,–8). ¿Cuál de las siguientes funciones, con dominio el conjunto de los números reales, está asociada a esta parábola?

A) $g(x) = -2x^2 - 8x - 8$
B) $h(x) = -2x^2 + 4x - 8$
C) $p(x) = -x^2 + 4x - 4$
D) $r(x) = -x^2 + 4x - 8$
E) $m(x) = -2x^2 + 8x - 8$

26. Sea f: $]-\infty,-3] \to B$ una función definida por $f(x) = -(x+3)^2$, ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

I) f es inyectiva.
II) Si $B =]-\infty,0]$ entonces f es epiyectiva.
III) Si f es biyectiva su inversa es $f^{-1}(x) = -3 + \sqrt{-x}$, con x en B.

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo I y III
E) I, II y III

27. Sea f una función definida en los reales mediante $f(x) = 4 \cdot \sqrt[3]{x-2} + 3$, entonces $f^{-1} =$

A) $\left(\frac{x-3}{4}\right)^3 - 2$
B) $\left(\frac{x-3}{4}\right)^3 + 2$
C) $\left(\frac{x-4}{3}\right)^3 + 2$
D) $\left(\frac{x-4}{3}\right)^3 - 2$
E) $\left(\frac{x-3}{4}\right)^2$

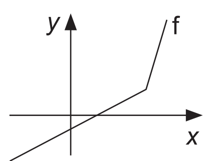
28. Si $f^{-1}(x-3) = 2x + 4$, entonces $f(4) =$

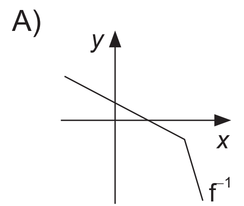
A) -4
B) -3
C) $-\frac{3}{2}$
D) 18
E) Falta información para determinarlo.

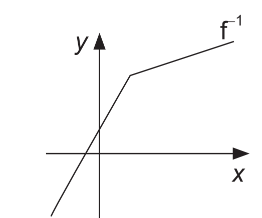
29. Sea f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x)=mx$, con $m\neq0$. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?

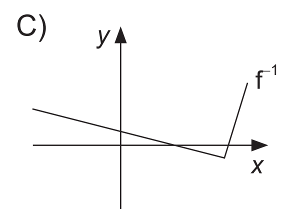
A) La imagen de m es un número real positivo.
B) si m = -1, entonces $f^{-1}(x) = f(x)$.
C) (f o f)(x) tiene como gráfica una recta cuya pendiente es positiva.
D) Si la gráfica de f es una recta con pendientes positiva, entonces f^{-1} tiene como gráfica una recta con pendiente negativa.
E) f y f^{-1} son funciones lineales.

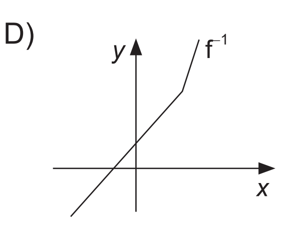
30. El gráfico adjunto, corresponde al de la función f definida en los reales. ¿Cuál de las siguientes alternativas representa mejor al gráfico de su función inversa?

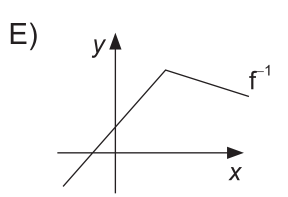


A)


B)


C)


D)


E)


31. Sea f: A $\rightarrow$ B, definida por $f(x) = 3x^2 + 2$, se puede determinar que la inversa de f es función, sabiendo que:

(1) $A =]-\infty,-1[$

(2) $B = [5,\infty[$

A) (1) por sí sola
B) (2) por sí sola
C) Ambas juntas, (1) y (2)
D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)
E) Se requiere información adicional

32. Sean m y n dos números reales tales que $m+n>0$ y $m-n>0$, ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) **siempre** verdadera(s)?

I) $m^2 > n^2$

II) $m > 0$

III) $\dfrac{m+n}{m-n} > 1$

A) Solo I
B) Solo III
C) Solo I y II
D) Solo II y III
E) Solo I y III

33. Si $a > b > 0$, ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) **siempre** verdadera(s)?

I) El área del rectángulo de lados **a + 2b** y **a** es mayor al área del rectángulo de lados **b** y **b + 2a**.

II) El área de un rectángulo de lados **2a** y **a** es mayor que el área de un rectángulo de lados **a + b** y **b**.

III) La suma de las áreas de los cuadrados de lados **a** y **b** es mayor que el área de un rectángulo de lados **a + 1** y **b**.

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo I y III
E) I, II y III

34. La diferencia entre las edades de Pedro y Antonio es mayor que 15 y menor que 18 años y la diferencia entre las edades de Antonio y Luis es a lo menos 10 y a lo más 12 años, entonces la diferencia entre las edades de Pedro y Luis es:

A) a lo sumo 30 años.
B) a lo menos 25 años.
C) un valor entre los 25 y 30 años.
D) superior a los 30 años.
E) inferior a los 25 años.

35. Si m y n son enteros, tal que $m > n > 0$, ¿cuál(es) de las siguientes expresiones es (son) **siempre** mayor(es) que $\frac{m}{n}$?

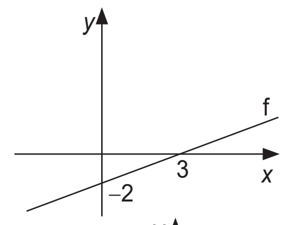
I) $\frac{m}{m+n}$

II) $\frac{m^2 - n^2}{mn - n^2}$

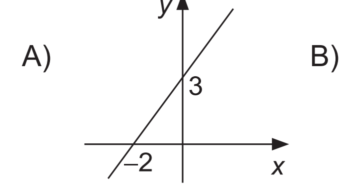
III) $\frac{mn + m^2}{m^2 - n^2}$

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo II y III
E) I, II y III

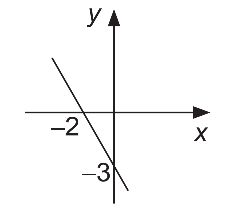
36. La siguiente gráfica corresponde a la de la función $y = f(x)$, ¿cuál de las siguientes gráficas representa mejor a la gráfica de $y = -f^{-1}(x)$?



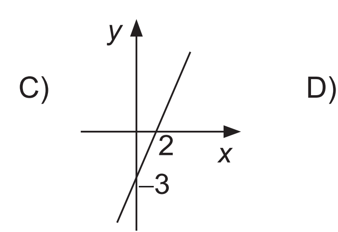
A)



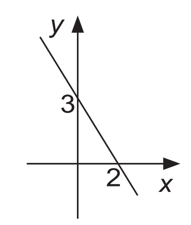
B)



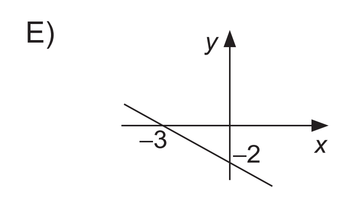
C)



D)



E)



37. Sean a y b dos números reales tales que $a < b < 0$, ¿cuál de las siguientes desigualdades es (son) siempre verdadera(s)?

I) $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

II) $\frac{a-b}{a+b} > 0$

III) $\frac{a-b}{a+b} > \frac{a}{b}$

A) Solo I
B) Solo III
C) Solo I y II
D) Solo II y III
E) I, II y III

38. Sean a y b números reales, tales que $a \neq b$, se puede determinar que $\frac{a-b}{a+b} > 1$, sabiendo que:

(1) $a + b > 0$
(2) $b < 0$

A) (1) por sí sola
B) (2) por sí sola
C) Ambas juntas, (1) y (2)
D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)
E) Se requiere información adicional

ANEXOS

Anexo 1: Perímetro de figuras planas

NOMBRE	FIGURA	PERÍMETRO
TRIÁNGULO CUALQUIERA	b a c	$a + b + c$
CUADRADO	a	$4a$
RECTÁNGULO	b a	$2(a + b)$
ROMBOIDE	b a	$2(a + b)$
CIRCUNFERENCIA	r	$2 \pi r$

Anexo 2: Área de figuras planas

NOMBRE	FIGURA	ÁREA
TRIÁNGULO CUALQUIERA	b, h, a, c	$\frac{ch}{2}$
TRIÁNGULO EQUILÁTERO	a	$\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$
TRIÁNGULO RECTÁNGULO	b, a	$\frac{ab}{2}$
CUADRADO	a	a^2
RECTÁNGULO	b, a	ab
ROMBO	f, e	$\frac{ef}{2}$
ROMBOIDE	h, a	ah
TRAPECIO	b, h, a	$\left(\frac{a+b}{2}\right)\cdot h$
CÍRCULO	r	πr^2

Anexo 3: Área y volumen de cuerpos geométricos

NOMBRE	CUERPO	ÁREA	VOLUMEN
CUBO (hexaedro regular)	a	$6a^2$	a^3
ORTOEDRO (paralelepípedo recto rectangular)	a b c	$2ab+2bc+2ac$	abc
PRISMA RECTO (en la fig. un caso especial: prisma de base pentagonal)	h d c A e b a	$ah+bh+ch+dh+eh + 2A = Ph+2A$ (P= perímetro del polígono basal)	$A\ h$ (A = área del polígono basal)
CILINDRO	h r	$2\pi rh+2\pi r^2$	πr^2h
CONO	h g r	$\pi rg+\pi r^2$	$\frac{1}{3}\pi r^2h$
ESFERA	r	$4\pi r^2$	$\frac{4}{3}\pi r^3$

RESPUESTAS MINIENSAYO

RESPUESTAS MINIENSAYO									
1. D	**2.** D	**3.** E	**4.** E	**5.** B	**6.** A	**7.** B	**8.** A	**9.** D	**10.** D
11. A	**12.** C	**13.** E	**14.** E	**15.** A	**16.** D	**17.** E	**18.** D	**19.** C	**20.** D
21. D	**22.** C	**23.** A	**24.** A	**25.** E	**26.** C	**27.** B	**28.** B	**29.** D	**30.** B
31. E	**32.** C	**33.** C	**34.** C	**35.** B	**36.** B	**37.** C	**38.** C		

CLASES CON CONTENIDOS Y EJEMPLOS

Si quieres aprender más, asiste a una clase virtual con el contenido de cada capítulo siguiendo los links o leyendo con tu celular los códigos QR que aquí te presentamos.

Estos códigos corresponden al texto original (Cid, 2019) por lo que los números de las páginas no coinciden con los presentados en este documento.

EJE ALGEBRA	
OPERATORIA ALGEBRAICA	ECUACIÓN Y FUNCIÓN CUADRÁTICA
https://www.editorialcid.com/21-temas-capitulo-5/	https://www.editorialcid.com/21-temas-capitulo-7/
FUNCIONES	TIPOS DE FUNCIONES Y FUNCIÓN INVERSA
https://www.editorialcid.com/21-temas-capitulo-8/	https://www.editorialcid.com/21-temas-capitulo-9/
DESIGUALDADES E INECUACIONES	PLANTEO DE PROBLEMAS
https://www.editorialcid.com/21-temas-capitulo-10/	https://www.editorialcid.com/21-temas-capitulo-6/





Repaso contenidos

MATEMÁTICA

EJE ÁLGEBRA

IVº medio